

()

()

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

()

()

PROBABILIDADE

*Um curso moderno
com aplicações*

8ª EDIÇÃO



SHELDON ROSS



MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ANTON & COLS

Cálculo, 8.ed., Volumes 1 e 2

ANTON & BUSBY

Álgebra Linear Contemporânea

ANTON & RORRES

Álgebra Linear com Aplicações, 8.ed.

BARONETT, S.

Lógica: Uma Introdução Voltada para as Ciências

BISQUERRA & COLS

Introdução à Estatística: Enfoque Informático com o Pacote Estatístico SPSS

FREUND, J.

Estatística Aplicada, Economia, Administração e Contabilidade, 11.ed.

GILAT & SUBRAMANIAM

Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas

GOLDSTEIN & COLS

Matemática Aplicada, Economia, Administração e Contabilidade, 10.ed.

ROGAWSKI, J.

Cálculo, Volumes 1 e 2

ROSS, S.

Probabilidade: Um Curso Moderno com Aplicações, 3.ed.

SANTOS & FERREIRA

Geometria Analítica

SIMON & BLUME

Matemática para Economistas

*SHARPE & COLS

Estatística Aplicada à Administração

*PRESS & COLS

Métodos em Computação Científica, 3.ed.

ZILL & CULLEN

Matemática Avançada para Engenharia, 3.ed., Volumes 1, 2 e 3

*Livros em preparação no momento de impressão desta obra, mas que muito em breve estarão à disposição dos leitores em língua portuguesa.

PROBABILIDADE

*Um curso moderno
com aplicações*



R826p Ross, Sheldon.
Probabilidade : um curso moderno com aplicações /
Sheldon Ross ; tradutor: Alberto Resende De Conti. – 8. ed. –
Porto Alegre : Bookman, 2010.
608 p. ; 25 cm.

ISBN 978-85-7780-621-8

1. Probabilidade. I. Título.

CDU 519.2

Catálogo na publicação: Renata de Souza Borges CRB-10/1922

SHELDON ROSS
University of Southern California

PROBABILIDADE

*Um curso moderno
com aplicações*

8ª EDIÇÃO

Tradução:

Alberto Resende De Conti
Doutor em Engenharia Elétrica (CPDEE - UFMG)
Professor Adjunto do Departamento de Engenharia Elétrica da UFMG

Consultoria, supervisão e revisão técnica desta edição:

Antonio Pertence Júnior
Professor Titular de Matemática da Faculdade de Sabará (FACSAB/MG)
Professor Assistente de Engenharia da Universidade FUMEC/MG
Membro Efetivo da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática)
Pós-Graduado em Processamento de Sinais pela Ryerson University (Toronto/Canadá)



2010

Obra originalmente publicada sob o título *A First Course in Probability*, 8th Edition.
ISBN 9780136033134

Authorized translation from the English language edition, entitled *A FIRST COURSE IN PROBABILITY*, 8th Edition by SHELDON ROSS, published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall. Copyright © 2010. All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

Portuguese language edition published by Bookman Companhia Editora Ltda, a Division of Artmed Editora SA, Copyright © 2010

Tradução autorizada a partir do original em língua inglesa da obra intitulada *A FIRST COURSE IN PROBABILITY*, 8ª Edição de autoria de SHELDON ROSS, publicado por Pearson Education, Inc., sob o selo Prentice Hall, Copyright © 2010. Todos os direitos reservados. Este livro não poderá ser reproduzido nem em parte nem na íntegra, nem ter partes ou sua íntegra armazenado em qualquer meio, seja mecânico ou eletrônico, inclusive fotoreprografiação, sem permissão da Pearson Education, Inc.

A edição em língua portuguesa desta obra é publicada por Bookman Companhia Editora Ltda, uma divisão da Artmed Editora SA, Copyright © 2010

Capa: *Rogério Grillo*, arte sobre capa original

Leitura final: *Théo Amon*

Editora Sênior: *Arysinha Jacques Affonso*

Editora Pleno: *Denise Weber Nowaczyk*

Projeto e editoração: *Techbooks*

Reservados todos os direitos de publicação, em língua portuguesa, à
ARTMED® EDITORA S.A.
(BOOKMAN® COMPANHIA EDITORA é uma divisão da ARTMED® EDITORA S.A.)
Av. Jerônimo de Ornelas, 670 – Santana
90040-340 – Porto Alegre – RS
Fone: (51) 3027-7000 Fax: (51) 3027-7070

É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web e outros), sem permissão expressa da Editora.

Unidade São Paulo
Av. Embaixador Macedo de Soares, 10.735 – Galpão 5 – Vila Anastacio
05035-000 – São Paulo – SP
Fone: (11) 3665-1100 Fax: (11) 3667-1333

SAC 0800 703-3444

IMPRESSO NO BRASIL
PRINTED IN BRAZIL

Para Rebecca

Respostas para Problemas Seleccionados

CAPÍTULO 1

1. 67600.000; 19.656.000 2. 1296 4. 24; 4 5. 144; 18 6. 2401 7. 720; 72; 144; 72 8. 120; 1260; 34.650 9. 27.720 10. 40.320; 10.080; 1152; 2880; 384 11. 720; 72; 144 12. 24.300.000; 17.100.720 13. 190 14. 2.598.960 16. 42; 94 17. 604.800 18. 600 19. 896; 1000; 910 20. 36; 26 21. 35 22. 18 23. 48 25. $52!/(13!)^4$ 27. 27.720 28. 65.536; 2520 29. 12.600; 945 30. 564.480 31. 165; 35 32. 1287; 14.112 33. 220; 572

CAPÍTULO 2

9. 74 10. 0,4; 0,1 11. 70; 2 12. 0,5; 0,32; 149/198 13. 20.000; 12.000; 11.000; 68.000; 10.000 14. 1,057 15. 0,0020; 0,4226; 0,0475; 0,0211; 0,00024 17. $9,10947 \times 10^{-6}$ 18. 0,048 19. 5/18 20. 0,9052 22. $(n+1)/2^n$ 23. 5/12 25. 0,4 26. 0,492929 27. 0,0888; 0,2477; 0,1243; 0,2099 30. 1/18; 1/6; 1/2 31. 2/9; 1/9 33. 70/323 36. 0,0045; 0,0588 37. 0,0833; 0,5 38. 4 39. 0,48 40. 1/64; 21/64; 36/64; 6/64 41. 0,5177 44. 0,3; 0,2; 0,1 46. 5 48. $1,0604 \times 10^{-3}$ 49. 0,4329 50. $2,6084 \times 10^{-6}$ 52. 0,09145; 0,4268 53. 12/35 54. 0,0511 55. 0,2198; 0,0343

CAPÍTULO 3

1. 1/3
2. 1/6; 1/5; 1/4; 1/3; 1/2; 1 3. 0,339 5. 6/91 6. 1/2 7. 2/3 8. 1/2
9. 7/11 10. 0,22 11. 1/17; 1/33 12. 0,504; 0,3629 14. 35/768; 210/768
15. 0,4848 16. 0,9835 17. 0,0792; 0,264 18. 0,331; 0,383; 0,286; 48,62
19. 44,29; 41,18 20. 0,4; 1/26 21. 0,496; 3/14; 9/62 22. 5/9; 1/6; 5/54
23. 4/9; 1/2 24. 1/3; 1/2 26. 20/21; 40/41 28. 3/128; 29/1536
29. 0,0893 30. 7/12; 3/5 33. 0,76; 49/76 34. 27/31 35. 0,62; 10/19
36. 1/2 37. 1/3; 1/5; 1 38. 12/37 39. 46/185 40. 3/13; 5/13; 5/52; 15/52
41. 43/459 42. 34,48 43. 4/9 45. 1/11 48. 2/3 50. 17,5; 38/165; 17/33
51. 0,65; 56/65; 8/65; 1/65; 14/35; 12/35; 9/35 52. 0,11; 16/89; 12/27; 3/5; 9/25
55. 9 57. (c) 2/3 60. 2/3; 1/3; 3/4 61. 1/6; 3/20 65. 9/13; 1/2 69. 9; 9; 18; 110; 4; 4; 8; 120 até 128 70. 1/9; 1/18 71. 38/64; 13/64; 13/64

73. $1/16; 1/32; 5/16; 1/4; 31/32$ 74. $9/19$ 75. $3/4, 7/12$ 76. $p^2/(1 - 2p + 2p^2)$
 79. $0,5550$ 81. $0,9530$ 73. $0,5; 0,6; 0,8$ 74. $9/19; 6/19; 4/19; 7/15; 53/165;$
 $7/33$ 89. $97/142; 15/26; 33/102$

CAPÍTULO 4

1. $p(4) = 6/91; p(2) = 8/91; p(1) = 32/91; p(0) = 1/91; p(-1) = 16/91; p(-2) = 28/91$ 4. $1/2; 5/18; 5/36; 5/84; 5/252; 1/252; 0; 0; 0; 0$ 5. $n - 2; i = 0, \dots, n$
 6. $p(3) = p(-3) = 1/8; p(1) = p(-1) = 3/8$ 12. $p(4) = 1/16; p(3) = 1/8;$
 $p(2) = 1/16; p(0) = 1/2; p(-i) = p(i); p(0) = 1$ 13. $p(0) = 0,28; p(500) =$
 $0,27; p(1000) = 0,315; p(1500) = 0,09; p(2000) = 0,045$ 14. $p(0) = 1/2; p(1) =$
 $1/6; p(2) = 1/12; p(3) = 1/20; p(4) = 1/5$ 17. $1/4; 1/6; 1/12; 1/2$ 19. $1/2;$
 $1/10; 1/5; 1/10; 1/10$ 20. $0,5918; \text{não}; -0,108$ 21. $39,28; 37$ 24. $p = 11/18;$
 máximo = $23/72$ 25. $0,46, 1,3$ 26. $11/2; 17/5$ 27. $A(p + 1/10)$ 28. $3/5$
 31. p^* 32. $11 - 10(0,9)^{10}$ 33. 3 35. $-0,067; 1,089$ 37. $82,2; 84,5$
 39. $3/8$ 40. $11/243$ 42. $p \geq 1/2$ 45. 3 50. $1/10; 1/10$ 51. $e^{-0,2}; 1 - 1,2e^{-0,2}$
 53. $1 - e^{-0,6}; 1 - e^{-219,18}$ 56. 253 57. $0,5768; 0,6070$ 59. $0,3935; 0,3033;$
 $0,0902$ 60. $0,8886$ 61. $0,4082$ 63. $0,0821; 0,2424$ 65. $0,3935; 0,2293;$
 $0,3935$ 66. $2/(2n + 1); 2/(2n - 2); e^{-1}$ 67. $2/n; (2n - 3)/(n - 1)^2; e^{-2}$
 68. $(1 - e^{-3})^{80}$ 70. $p + (1 - p)e^{-\lambda t}$ 71. $0,1500; 0,1012$ 73. $5,8125$
 74. $32/243; 4864/6561; 160/729; 160/729$ 78. $18(17)^{n-1}/(35)^n$ 81. $3/10; 5/6;$
 $75/138$ 82. $0,3439$ 83. $1,5$

CAPÍTULO 5

2. $3,5e^{-5/2}$ 3. não; não 4. $1/2$ 5. $1 - (0,01)^{1/5}$ 6. $4, 0, \infty$ 7. $3/5; 6/5$
 8. 2 10. $2/3; 2/3$ 11. $2/5$ 13. $2/3; 1/3$ 15. $0,7977; 0,6827; 0,3695;$
 $0,9522; 0,1587$ 16. $(0,9938)^{10}$ 18. $22,66$ 19. (c) $1/2$, (d) $1/4$ 20. $0,9994;$
 $0,75; 0,977$ 22. $9,5; 0,0019$ 23. $0,9258; 0,1762$ 26. $0,0606; 0,0525$
 28. $0,8363$ 29. $0,9993$ 32. $e^{-1}; e^{-1/2}$ 34. $e^{-1}; 1/3$ 38. $3/5$ 40. $1/y$

CAPÍTULO 6

2. (a) $14/39; 10/39; 10/39; 5/39$ (b) $84; 70; 70; 40; 40; 40; 15$ tudo dividi-
 do por 429 3. $15/26; 5/26; 5/26; 1/26$ 4. $25/169; 40/169; 40/169; 64/169$
 7. $p(i, j) = p^i(1 - p)^{j-i}$ 8. $c = 1/8; E[X] = 0$ 9. $(12x^2 + 6x)/7; 15/56; 0,8625;$
 $5/7; 8/7$ 10. $1/2; 1 - e^{-\theta}$ 11. $0,1458$ 12. $39,3e^{-5}$ 13. $1/6; 1/2$ 15. $\pi/4$
 16. $n(1/2)^{n-1}$ 17. $1/3$ 18. $7/9$ 19. $1/2$ 21. $2/5; 2/5$ 22. não; $1/3$ 23. $1/2;$
 $2/3; 1/20; 1/18$ 25. $e^{-1}/i!$ 28. $\frac{1}{2}e^{-t}; 1 - 3e^{-2}$ 29. $0,0326$ 30. $0,3772; 0,2061$
 31. $0,0829; 0,3766$ 32. $e^{-2}; 1 - 3e^{-2}$ 35. $5/13; 8/13$ 36. $1/6; 5/6; 1/4; 3/4$
 41. $(y + 1)^2 xe^{-y/(y+1)}; xe^{-xy}; e^{-x}$ 42. $1/2 + 3y/(4x) - y^2/(4x^2)$ 46. $(1 - 2d/L)^3$
 47. $0,79297$ 48. $1 - e^{-5\lambda a}; (1 - e^{-\lambda a})^5$ 52. r/π 53. r 56. (a) $u/(v + 1)^2$

CAPÍTULO 7

1. 52,5/12 2. 324; 199,6 3. $1/2$; $1/4$; 0 4. $1/6$; $1/4$; $1/2$ 5. $3/2$ 6. 35
 7. 0,9; 4,9; 4,2 8. $(1 - (1 - p)^n)/p$ 9. 0,6; 0 10. $2(n - 1)p(1 - p)$
 11. $(3n^2 - n)/(4n - 2)$, $3n^2/(4n - 2)$ 12. $m/(1 - p)$ 13. $1/2$ 14. 4
 15. 0,9301; 87,5755 16. 14,7 17. 147/110 18. $n/(n + 1)$; $1/(n + 1)$
 19. $\frac{437}{35}$; 12; 4; $\frac{123}{35}$ 20. 175/6 21. 14 22. 20/19; 360/361 23. 21,2; 18,929;
 49,214 24. $-n/36$ 25. 0 26. $1/8$ 27. 6; 112/33 28. 100/19; 16.200/6137;
 10/19; 3240/6137 29. $1/2$; 0 30. $1/(n - 1)$ 31. 6; 7; 5,8192 32. 6,06
 33. $2y^2$ 34. $y^3/4$ 35. 12 36. 8 37. $N(1 - e^{-100N})$ 38. 12,5 39. $-96/145$
 40. 5,16 41. 218 42. $x[1 + (2p - 1)^2]^n$ 43. $1/2$; $1/16$; $2/81$ 44. $1/2$, $1/3$
 45. $1/i$; $[i(i + 1)]^{-1}$; ∞ 46. μ ; $1 + \sigma^2$; $\sin$; σ^2 47. 0,176; 0,141

CAPÍTULO 8

1. $\geq 19/20$ 2. $15/17$; $\geq 3/4$; ≥ 10 3. ≥ 3 4. $\leq 4/3$; 0,8428 5. 0,1416
 6. 0,9431 7. 0,3085 8. 0,6932 9. $(327)^2$ 10. 117 11. $\geq 0,057$ 12. 0,0162;
 0,0003; 0,2514; 0,2514 13. $n \geq 23$ 14. 0,013; 0,018; 0,691 15. $\leq 0,2$
 16. 0,769; 0,357; 0,4267; 0,1093; 0,112184

CAPÍTULO 9

1. $1/9$; $5/9$ 2. 0,9735; 0,9098; 0,7358; 0,5578 3. (b) $1/6$ 4. 2,585; 0,5417;
 3,1267 5. 5,5098

Soluções para os Problemas de Autoteste e Exercícios

CAPÍTULO 1

- 1.1 (a) Há $4!$ sequências diferentes das letras C, D, E, F. Para cada uma dessas sequências, podemos obter uma sequência com A e B uma ao lado da outra inserindo A e B na ordem A, B ou B, A em qualquer uma das cinco posições, isto é, antes da primeira letra da permutação C, D, E, F, ou entre a primeira e a segunda letra, e assim por diante. Com isso, há $2 \cdot 5 \cdot 4! = 240$ arranjos diferentes. Outra maneira de resolver este problema é imaginar que B está colado nas costas de A. Existem então $5!$ sequências em que A está imediatamente antes de B. Como também há $5!$ sequências nas quais B está imediatamente antes de A, obtemos novamente um total de $2 \cdot 5! = 240$ arranjos diferentes.
- (b) Há $6! = 720$ arranjos possíveis, e, como existem tantos arranjos com A na frente de B como o contrário, existem 360 arranjos.
- (c) Dos 720 arranjos possíveis, há tantos arranjos com A antes de B antes de C quanto qualquer uma das $3!$ possíveis sequências de A, B, e C. Com isso, há $720/6 = 120$ sequências possíveis.
- (d) Dos 360 arranjos com A antes de B, metade terá C antes de D, e metade terá D antes de C. Portanto, há 180 arranjos com A antes de B e C antes de D.
- (e) Colando B nas costas de A, e D nas costas de C, obtemos $4! = 24$ sequências diferentes em que B está logo após A, e D logo após C. Como a ordem de A e B e de C e D pode ser invertida, há $4 \cdot 24 = 96$ arranjos diferentes.
- (f) Há $5!$ sequências em que E é a última letra. Portanto, há $6! - 5! = 600$ sequências nas quais E não é a última letra.

1.2 $3!4!3!3!$, já que existem $3!$ possíveis ordens de países e depois ainda é necessário ordenar os compatriotas.

1.3 (a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

- (b) $8 \cdot 7 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 = 672$. O resultado da letra (b) é obtido porque há $8 \cdot 7 \cdot 6$ escolhas que não incluem A ou B, e $3 \cdot 8 \cdot 7$ escolhas nas quais um de A ou B sirva, mas não o outro. Isto resulta porque o membro de um par pode ser designado para qualquer um dos 3 escritórios, sendo a próxima posição preenchida por qualquer uma das 8 pessoas restantes e a posição final preenchida por qualquer uma 7 pessoas restantes.
- (c) $8 \cdot 7 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 8 = 384$.
- (d) $3 \cdot 9 \cdot 8 = 216$.
- (e) $9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8 = 576$.

1.4 (a) $\binom{10}{7}$

$$(b) \binom{5}{3} \binom{5}{4} + \binom{5}{4} \binom{5}{3} + \binom{5}{5} \binom{5}{2}$$

$$1.5 \binom{7}{3,2,2} = 210$$

1.6 Há $\binom{7}{3} = 35$ escolhas para as três posições das letras. Para cada uma delas, há $(26)^3(10)^4$ placas diferentes. Portanto, existem no total $35 \cdot (26)^3 \cdot (10)^4$ placas diferentes.

1.7 Qualquer escolha de r dos n itens é equivalente a uma escolha de $n - r$, isto é, de itens não selecionados.

$$1.8 (a) 10 \cdot 9 \cdot 9 \cdots 9 = 10 \cdot 9^{n-1}$$

(b) $\binom{n}{i} 9^{n-i}$, já que há $\binom{n}{i}$ escolhas para as i posições nas quais os zeros serão colocados e cada uma das demais $n - i$ posições pode conter quaisquer algarismos 1, ..., 9.

$$1.9 (a) \binom{3n}{3}$$

$$(b) 3 \binom{n}{3}$$

$$(c) \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{n}{2} \binom{n}{1} = 3n^2(n-1)$$

$$(d) n^3$$

$$(e) \binom{3n}{3} = 3 \binom{n}{3} + 3n^2(n-1) + n^3$$

1.10 Há $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ números nos quais não se repete nenhum algarismo. Como há $\binom{5}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ números nos quais apenas um algarismo específico aparece duas vezes, então há $9 \binom{5}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ números nos quais apenas um único algarismo aparece duas vezes. Como há $7 \cdot \frac{5!}{2!2!}$ números nos quais dois algarismos específicos aparecem duas vezes, então há $\binom{9}{2} 7 \cdot \frac{5!}{2!2!}$ números nos quais dois algarismos aparecem duas vezes. Logo, a resposta é

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 9 \binom{5}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + \binom{9}{2} 7 \cdot \frac{5!}{2!2!}$$

1.11 (a) Podemos encarar este problema como um experimento em sete etapas. Primeiro escolha 6 casais que possuam um representante no grupo, e depois selecione um dos membros de cada um desses casais. Pelo princípio básico da contagem generalizado, há $\binom{10}{6} 2^6$ escolhas diferentes.

(b) Primeiro selecione os 6 casais que possuem um representante no grupo e então selecione 3 desses casais que vão contribuir com um homem. Portanto, há $\binom{10}{6} \binom{6}{3} = \frac{10!}{4!3!3!}$ escolhas diferentes. Outra maneira de resolver este problema é selecionar primeiro 3 homens e depois 3 mulheres que não estejam relacionadas a eles. Isso mostra que há $\binom{10}{3} \binom{7}{3} = \frac{10!}{3!3!4!}$ escolhas diferentes.

- 1.12** $\binom{8}{3} \binom{7}{3} + \binom{8}{4} \binom{7}{2} = 3430$. O primeiro termo fornece o número de comitês que possuem 3 mulheres e 3 homens; o segundo fornece o número de comitês que possuem 4 mulheres e 2 homens.
- 1.13** (número de soluções de $x_1 + \dots + x_5 = 4$)(número de soluções de $x_1 + \dots + x_5 = 5$) (número de soluções de $x_1 + \dots + x_5 = 6$) = $\binom{8}{4} \binom{9}{4} \binom{10}{4}$.
- 1.14** Como há $\binom{j-1}{n-1}$ vetores positivos cuja soma é j , deve haver $\sum_{j=n}^k \binom{j-1}{n-1}$ vetores como esse. Mas $\binom{j-1}{n-1}$ é o número de subconjuntos de tamanho n do conjunto de números $\{1, \dots, k\}$ no qual j é o maior elemento no subconjunto. Consequentemente, $\sum_{j=n}^k \binom{j-1}{n-1}$ é justamente o número total de subconjuntos de tamanho n de um conjunto de tamanho k , o que mostra que a resposta anterior é igual a $\binom{k}{n}$.
- 1.15** Vamos primeiro determinar o número de resultados diferentes nos quais k pessoas são aprovadas. Como há $\binom{n}{k}$ diferentes grupos de tamanho k , e $k!$ possíveis seqüências de notas, tem-se que há $\binom{n}{k} k!$ resultados possíveis nos quais k pessoas são aprovadas. Consequentemente, há $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k!$ resultados possíveis.
- 1.16** O número de subconjuntos de tamanho 4 é $\binom{20}{4} = 4845$. Como o número de subconjuntos que não contém nenhum dos primeiros cinco elementos é $\binom{15}{4} = 1365$, o número daqueles que contêm pelo menos um é 3480. Outra maneira de resolver este problema é observar que há $\binom{5}{i} \binom{15}{4-i}$ subconjuntos que contêm exatamente i dos primeiros cinco elementos e calcular a soma para $i = 1, 2, 3, 4$.
- 1.17** Multiplicando ambos os lados por 2, devemos mostrar que
- $$n(n-1) = k(k-1) + 2k(n-k) + (n-k)(n-k-1)$$
- Obtém-se a expressão acima porque o lado direito é igual a
- $$k^2(1-2+1) + k(-1+2n-n-n+1) + n(n-1)$$
- Para um argumento combinatório, considere um grupo de n itens e um subgrupo contendo k dos n itens. Então $\binom{k}{2}$ é o número de subconjuntos de tamanho 2 que contêm 2 itens do subgrupo de tamanho k , $k(n-k)$ é o número de subconjuntos que contêm 1 item do subgrupo, e $\binom{n-k}{2}$ é o número de subconjuntos que contêm 0 itens do subgrupo. A soma desses termos fornece o número total de subgrupos de tamanho 2, isto é, $\binom{n}{2}$.
- 1.18** Há 3 escolhas que podem ser feitas de famílias formadas por um único pai e 1 filho; $3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$ escolhas que podem ser feitas de famílias formadas por um único pai e 2 filhos; $5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$ escolhas que podem ser feitas de famílias formadas por 2 pais e um único filho; $7 \cdot 2 \cdot 2 = 28$ escolhas que podem ser feitas de famílias formadas por 2 pais e 2 filhos; $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ escolhas que podem ser feitas de famílias formadas por 2 pais e 3 filhos. Há, portanto, 80 escolhas possíveis.

- 1.19 Escolha primeiro as 3 posições dos números e depois distribua as letras e os números. Assim, há $\binom{8}{3} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ placas diferentes. Se os números devem ser consecutivos, então há 6 posições possíveis para os números. Nesse caso, há $6 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ placas diferentes.

CAPÍTULO 2

- 2.1 (a) $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
 (b) $2 \cdot 6 = 6$
 (c) $3 \cdot 4 = 12$
 (d) $AB = \{(\text{galinha, massa, sorvete}), (\text{galinha, arroz, sorvete}), (\text{galinha, batatas, sorvete})\}$
 (e) 8
 (f) $ABC = \{(\text{galinha, arroz, sorvete})\}$

- 2.2 Seja A o evento em que um terno é comprado, B o evento em que uma camisa é comprada, e C o evento em que uma gravata é comprada. Então

$$P(A \cup B \cup C) = 0,22 + 0,30 + 0,28 - 0,11 - 0,14 - 0,10 + 0,06 = 0,51$$

(a) $1 - 0,51 = 0,49$

- (b) A probabilidade de que dois ou mais itens sejam comprados é

$$P(AB \cup AC \cup BC) = 0,11 + 0,14 + 0,10 - 0,06 - 0,06 - 0,06 + 0,06 = 0,23$$

Com isso, a probabilidade de que exatamente 1 item seja comprado é $0,51 - 0,23 = 0,28$.

- 2.3 Por simetria, a décima quarta carta tem a mesma probabilidade de ser qualquer uma das 52 cartas; logo, a probabilidade é igual a $4/52$. Um argumento mais formal é contar o número dos $52!$ resultados para os quais a décima quarta carta é um ás. Isso resulta em

$$p = \frac{4 \cdot 51 \cdot 50 \cdots 2 \cdot 1}{(52)!} = \frac{4}{52}$$

Fazendo com que A seja o evento em que o primeiro ás ocorre na décima quarta carta, temos

$$P(A) = \frac{48 \cdot 47 \cdots 36 \cdot 4}{52 \cdot 51 \cdots 40 \cdot 39} = 0,0312$$

- 2.4 Seja D o evento em que a temperatura mínima é de 21°C . Então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 - P(AB)$$

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(CD) = 0,2 + P(D) - P(CD)$$

Como $A \cup B = C \cup D$ e $AB = CD$, subtraindo uma equação da outra obtemos

$$0 = 0,5 - P(D)$$

ou $P(D) = 0,5$.

- 2.5 (a) $\frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = 0,6761$

(b) $\frac{52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = 0,1055$

2.6 Seja R o evento em que ambas as bolas são vermelhas, e B o evento em que ambas são pretas. Então

$$P(R \cup B) = P(R) + P(B) = \frac{3 \cdot 4}{6 \cdot 10} + \frac{3 \cdot 6}{6 \cdot 10} = 0,5$$

$$3.7 \text{ (a)} \quad \frac{1}{\binom{40}{8}} = 1,3 \times 10^{-8}$$

$$\text{(b)} \quad \frac{\binom{8}{7} \binom{32}{1}}{\binom{40}{8}} = 3,3 \times 10^{-6}$$

$$\text{(c)} \quad \frac{\binom{8}{6} \binom{32}{2}}{\binom{40}{8}} + 1,3 \times 10^{-8} + 3,3 \times 10^{-6} = 1,8 \times 10^{-4}$$

$$2.8 \text{ (a)} \quad \frac{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3}{\binom{14}{4}} = 0,1439$$

$$\text{(b)} \quad \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{2}}{\binom{14}{4}} = 0,0360$$

$$\text{(c)} \quad \frac{\binom{8}{4}}{\binom{14}{4}} = 0,0699$$

2.9 Seja $S = \bigcup_{i=1}^n A_i$, e considere o experimento de escolher aleatoriamente um elemento de S . Então $P(A) = N(A)/N(S)$, e o resultado é obtido a partir das Proposições 4.3 e 4.4.

2.10 Como há $5! = 120$ resultados nos quais a posição do cavalo número 1 é especificada, tem-se $N(A) = 360$. Similarmente, $N(B) = 120$, e $N(AB) = 2 \cdot 4! = 48$. Portanto, do Problema de Autoteste 2.9, obtemos $N(A \cup B) = 432$.

2.11 Uma maneira de resolver este problema é começar com a probabilidade complementar de que pelo menos um naipe não apareça. Seja A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, o evento em que nenhuma carta do i -ésimo naipe aparece. Então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^4 A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_j \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \cdots - P(A_1 A_2 A_3 A_4)$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}} - \binom{4}{2} \frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}} + \binom{4}{3} \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \\
&= 4 \frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}} - 6 \frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}} + 4 \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}
\end{aligned}$$

A probabilidade desejada é igual a 1 menos a expressão anterior. Outra maneira de resolver o problema é fazer com que A seja o evento em que todos os 4 naipes são representados, e então usar

$$P(A) = P(n, n, n, n, o) + P(n, n, n, o, n) + P(n, n, o, n, n) + P(n, o, n, n, n)$$

onde $P(n, n, n, n, o)$ é, por exemplo, a probabilidade de que a primeira, a segunda e a terceira cartas sejam de um novo naipe, a quarta carta seja de um naipe velho (isto é, de um naipe que já tenha aparecido), e a quinta carta seja de um novo naipe. Isso resulta em

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13 \cdot 48 + 52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 36 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \\
&\quad + \frac{52 \cdot 39 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 13 + 52 \cdot 12 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \\
&= \frac{52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13(48 + 36 + 24 + 12)}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \\
&= 0,2637
\end{aligned}$$

- 2.12** Há $(10)!/2^5$ diferentes divisões de 10 jogadores em um par, um segundo par, e assim por diante. Há, portanto, $(10)!(5!2^5)$ divisões em 5 pares. Existem $\binom{6}{2} \binom{4}{2}$ maneiras de se escolher o atacante e o defensor que ficarão juntos, e 2 maneiras de ordenar os respectivos pares. Como existe 1 maneira de formar um par com os dois defensores restantes e $4!(2!2^2) = 3$ maneiras de se formar dois pares com os atacantes restantes, a probabilidade desejada é

$$P\{2 \text{ pares mistos}\} = \frac{\binom{6}{2} \binom{4}{2} (2)(3)}{(10)!(5!2^5)} = 0,5714$$

- 2.13** Suponha que R represente o evento em que a letra R é repetida; similarmente, defina os eventos E e V . Então

$$P\{\text{mesma letra}\} = P(R) + P(E) + P(V) = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

2.14 Sejam $B_1 = A_1, B_i = A_i \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right)^c, i > 1$. Então,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \end{aligned}$$

Onde a última igualdade usa o fato de que os B_i 's são mutuamente exclusivos. A desigualdade é então obtida porque $B_i \subset A_i$.

2.15

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= 1 - P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^c) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.16 O número de partições nas quais $\{1\}$ é um subconjunto é igual ao número de partições dos $n-1$ elementos restantes em $k-1$ subconjuntos não vazios, isto é, $T_{k-1}(n-1)$. Como existem $T_k(n-1)$ partições de $\{2, \dots, n-1\}$ elementos em k subconjuntos não vazios, e k possibilidades de alocação para o elemento 1, tem-se que existem $kT_k(n-1)$ partições para as quais $\{1\}$ não é um subconjunto. Com isso, obtém-se o resultado desejado.

2.17 Suponha que R, W e B representem os eventos em que, respectivamente, nenhuma bola vermelha, branca ou azul é escolhida. Então

$$\begin{aligned} P(R \cup W \cup B) &= P(R) + P(W) + P(B) - P(RW) - P(RB) \\ &\quad - P(WB) + P(RWB) \\ &= \frac{\binom{13}{5}}{\binom{18}{5}} + \frac{\binom{12}{5}}{\binom{18}{5}} + \frac{\binom{11}{5}}{\binom{18}{5}} - \frac{\binom{7}{5}}{\binom{18}{5}} - \frac{\binom{6}{5}}{\binom{18}{5}} \\ &\quad - \frac{\binom{5}{5}}{\binom{18}{5}} \\ &\approx 0,2933 \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade de que todas as cores apareçam no subconjunto escolhido é de aproximadamente $1 - 0,2933 = 0,7067$.

- 2.18** (a) $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{2}{221}$
 (b) Como há 9 bolas não azuis, a probabilidade é $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{9}{442}$.
 (c) Como há 3! sequências possíveis de cores diferentes, e todas as possibilidades para as 3 últimas bolas são igualmente prováveis, a probabilidade é $\frac{3! \cdot 4 \cdot 8 \cdot 5}{17 \cdot 16 \cdot 15} = \frac{4}{17}$.
 (d) A probabilidade de que as bolas vermelhas estejam em 4 posições específicas é igual a $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}$. Como há 14 possíveis alocações de bolas vermelhas nas quais elas estão juntas, a probabilidade é $\frac{14 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{1}{170}$.
- 2.19** (a) A probabilidade de que as 10 cartas sejam formadas por 4 espadas, 3 copas, 2 ouros e 1 paus é $\frac{\binom{13}{4} \binom{13}{3} \binom{13}{2} \binom{13}{1}}{\binom{52}{10}}$. Como há 4! escolhas possíveis dos naipes para que eles tenham 4, 3, 2, e 1 cartas, respectivamente, resulta que a probabilidade é igual a $\frac{24 \binom{13}{4} \binom{13}{3} \binom{13}{2} \binom{13}{1}}{\binom{52}{10}}$.
 (b) Como há $\binom{4}{2} = 6$ escolhas para os dois naipes que vão contribuir com 3 cartas, e 2 escolhas para o naipe que vai contribuir com 4 cartas, a probabilidade é $\frac{12 \binom{13}{3} \binom{13}{3} \binom{13}{4}}{\binom{52}{10}}$.
- 2.20** Todas as bolas vermelhas são retiradas antes de todas as bolas azuis se e somente se a última bola retirada for azul. Como todas as 30 bolas tem a mesma probabilidade de serem a última bola retirada, a probabilidade é igual a $10/30$.

CAPÍTULO 3

3.1 (a) $p(\text{não há ases}) = \frac{\binom{35}{13}}{\binom{39}{13}}$

(b) $1 - P(\text{não há ases}) = \frac{4 \binom{35}{12}}{\binom{39}{13}}$

(c) $P(i \text{ ases}) = \frac{\binom{3}{i} \binom{36}{13-i}}{\binom{39}{13}}$

3.2 Suponha que L_i represente o evento em que o tempo de vida útil seja maior que $10.000 \times i$ km.

(a) $P(L_2|L_1) = P(L_1 L_2)/P(L_1) = P(L_2)/P(L_1) = 1/2$

(b) $P(L_3|L_1) = P(L_1 L_3)/P(L_1) = P(L_3)/P(L_1) = 1/8$

3.3 Coloque 1 bola branca e 0 bolas pretas em uma urna, e as 9 bolas brancas e as 10 bolas pretas restantes na segunda urna.

- 3.4 Seja T o evento em que a bola transferida é branca, e W o evento em que uma bola branca é retirada da urna B . Então

$$\begin{aligned} P(T|W) &= \frac{P(W|T)P(T)}{P(W|T)P(T) + P(W|T^c)P(T^c)} \\ &= \frac{(2/7)(2/3)}{(2/7)(2/3) + (1/7)(1/3)} = 4/5 \end{aligned}$$

- 3.5 (a) $\frac{r}{r+w}$, porque cada uma das $r + w$ bolas tem a mesma probabilidade de ser a bola retirada.

(b), (c)

$$\begin{aligned} P(R_j|R_i) &= \frac{P(R_i R_j)}{P(R_i)} \\ &= \frac{\binom{r}{2}}{\binom{r+w}{2}} \\ &= \frac{r}{r+w} \\ &= \frac{r-1}{r+w-1} \end{aligned}$$

Um argumento mais simples é notar que, para $i \neq j$, dado que a i -ésima bola retirada é vermelha, a j -ésima bola retirada tem a mesma probabilidade de ser qualquer uma das $r + w - 1$ bolas restantes, das quais $r - 1$ são vermelhas.

- 3.6 Suponha que B_i represente o evento em que a bola i é preta, e considere $R_i = B_i^c$. Então

$$\begin{aligned} P(B_1|R_2) &= \frac{P(R_2|B_1)P(B_1)}{P(R_2|B_1)P(B_1) + P(R_2|R_1)P(R_1)} \\ &= \frac{[r/(b+r+c)][b/(b+r)]}{[r/(b+r+c)][b/(b+r)] + [(r+c)/(b+r+c)][r/(b+r)]} \\ &= \frac{b}{b+r+c} \end{aligned}$$

- 3.7 Suponha que B represente o evento em que ambas as cartas são ases.

(a)

$$\begin{aligned} P[B|\text{sim para o ás de espadas}] &= \frac{P[B, \text{sim para o ás de espadas}]}{P[\text{sim para o ás de espadas}]} \\ &= \frac{\binom{1}{1} \binom{3}{1}}{\binom{52}{2}} / \frac{\binom{1}{1} \binom{51}{1}}{\binom{52}{2}} \\ &= 3/51 \end{aligned}$$

- (b) Como a segunda carta tem a mesma probabilidade de ser qualquer uma das 51 cartas restantes, das quais 3 são ases, vemos que a resposta nesta situação também é 3/51.

- (c) Como sempre podemos trocar qual carta é considerada a primeira e qual é considerada a segunda, o resultado deve ser o mesmo da letra (b). Um argumento mais formal é dado a seguir:

$$\begin{aligned} P\{B|a \text{ segunda carta é um ás}\} &= \frac{P\{B, a \text{ segunda carta é um ás}\}}{P\{a \text{ segunda carta é um ás}\}} \\ &= \frac{P(B)}{P(B) + P\{a \text{ primeira não é um ás, a segunda é um ás}\}} \\ &= \frac{(4/52)(3/51)}{(4/52)(3/51) + (48/52)(4/51)} \\ &= 3/51 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P\{B|\text{pelo menos uma}\} &= \frac{P(B)}{P\{\text{pelo menos uma}\}} \\ &= \frac{(4/52)(3/51)}{1 - (48/52)(47/51)} \\ &= 1/33 \end{aligned}$$

3.8

$$\frac{P(H|E)}{P(G|E)} = \frac{P(HE)}{P(GE)} = \frac{P(H)P(E|H)}{P(G)P(E|G)}$$

A hipótese H é 1,5 vezes mais provável.

- 3.9 Suponha que A represente o evento em que a planta esteja viva e W represente o evento em que ela tenha sido regada.

(a)

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|W)P(W) + P(A|W^c)P(W^c) \\ &= (0,85)(0,9) + (0,2)(0,1) = 0,785 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(W^c|A^c) &= \frac{P(A^c|W^c)P(W^c)}{P(A^c)} \\ &= \frac{(0,85)(0,1)}{0,215} = \frac{16}{43} \end{aligned}$$

3.10 (a) $1 - P(\text{não há bolas vermelhas}) = 1 - \frac{\binom{22}{6}}{\binom{30}{6}}$

- (b) Dado que nenhuma bola vermelha tenha sido sorteada, as seis bolas sorteadas podem ser, com mesma probabilidade, qualquer uma das 22 bolas não vermelhas. Logo,

$$P(2 \text{ verdes} | \text{nenhuma vermelha}) = \frac{\binom{10}{2} \binom{12}{4}}{\binom{22}{6}}$$

- 3.11 Seja W o evento em que a pilha funciona, e suponha que C e D representem os eventos em que a pilha é dos tipos C e D , respectivamente.

$$(a) P(W) = P(W|C)P(C) + P(W|D)P(D) = 0,7(8/14) + 0,4(6/14) = 4/7$$

(b)

$$P(C|W^c) = \frac{P(CW^c)}{P(W^c)} = \frac{P(W^c|C)P(C)}{3/7} = \frac{0,3(8/14)}{3/7} = 0,4$$

3.12 Seja L_i o evento em que Maria gosta do livro i , $i = 1, 2$. Então

$$P(L_2|L_1^c) = \frac{P(L_1^c L_2)}{P(L_1^c)} = \frac{P(L_1^c L_2)}{0,4}$$

Usando o fato de L_2 ser a união dos eventos mutuamente exclusivos $L_1 L_2$ e $L_1^c L_2$, vemos que

$$0,5 = P(L_2) = P(L_1 L_2) + P(L_1^c L_2) = 0,4 + P(L_1^c L_2)$$

Logo,

$$P(L_2|L_1^c) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

3.13 (a) Esta é a probabilidade de que a bola retirada seja azul. Como cada uma das 30 bolas tem a mesma probabilidade de ser a última bola retirada, a probabilidade é de $1/3$.

(b) Esta é a probabilidade de que a última bola vermelha ou azul a ser retirada seja uma bola azul. Como é igualmente provável que ela seja qualquer uma das 30 bolas vermelhas ou azuis, a probabilidade de que ela seja azul é de $1/3$.

(c) Suponha que B_1 , R_2 e G_3 representem, respectivamente, os eventos em que a primeira bola retirada é azul, a segunda é vermelha, e a terceira é verde. Então

$$P(B_1 R_2 G_3) = P(G_3)P(R_2|G_3)P(B_1|R_2 G_3) = \frac{8}{38} \frac{20}{30} = \frac{8}{57}$$

onde $P(G_3)$ é justamente a probabilidade de que a última bola seja verde. $P(R_2|G_3)$ é calculada observando-se que, dado que a última bola é verde, cada uma das vinte bolas vermelhas e 10 bolas azuis tem a mesma probabilidade de ser a última do grupo a ser retirada. Assim, a probabilidade de que ela seja uma das bolas vermelhas é igual a $20/30$ (naturalmente, $P(B_1|R_2 G_3) = 1$).

$$(d) P(B_1) = P(B_1 G_2 R_3) + P(B_1 R_2 G_3) = \frac{20}{38} \frac{8}{18} + \frac{8}{57} = \frac{64}{171}$$

3.14 Seja H o evento em que a moeda dá cara, T_h o evento em que B recebe a informação de que a moeda deu cara, F o evento em que A se esquece do resultado, e C o evento em que B recebe a informação correta. Então

(a)

$$\begin{aligned} P(T_h) &= P(T_h|F)P(F) + P(T_h|F^c)P(F^c) \\ &= (0,5)(0,4) + P(H)(0,6) \\ &= 0,68 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|F)P(F) + P(C|F^c)P(F^c) \\ &= (0,5)(0,4) + 1(0,6) = 0,80 \end{aligned}$$

(c)

$$P(H|T_h) = \frac{P(HT_h)}{P(T_h)}$$

Agora,

$$\begin{aligned} P(HT_h) &= P(HT_h|F)P(F) + P(HT_h|F^c)P(F^c) \\ &= P(H|F)P(T_h|HF)P(F) + P(H)P(F^c) \\ &= (0,8)(0,5)(0,4) + (0,8)(0,6) = 0,64 \end{aligned}$$

o que dá o resultado $P(H|T_h) = 0,64/0,68 = 16/17$

- 3.15** Como o rato preto tem uma cria marrom, podemos concluir que seus dois pais possuem um gene preto e um marrom.

(a)

$$P(2 \text{ pretos} | \text{pelo menos um}) = \frac{P(2)}{P(\text{pelo menos um})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

- (b) Seja F o evento em que todas as crias são pretas, B_2 o evento em que o rato preto possui 2 genes pretos, e B_1 o evento em que ele possui 1 gene preto e 1 gene marrom. Então

$$\begin{aligned} P(B_2|F) &= \frac{P(F|B_2)P(B_2)}{P(F|B_2)P(B_2) + P(F|B_1)P(B_1)} \\ &= \frac{(1)(1/3)}{(1)(1/3) + (1/2)^5(2/3)} = \frac{16}{17} \end{aligned}$$

- 3.16** Suponha que F seja o evento em que a corrente flui de A para B , e C_i o evento em que o relé i é fechado. Então

$$P(F) = P(F|C_1)p_1 + P(F|C_1^c)(1 - p_1)$$

Agora,

$$\begin{aligned} P(F|C_1) &= P(C_4 \cup C_2C_5) \\ &= P(C_4) + P(C_2C_5) - P(C_4C_2C_5) \\ &= p_4 + p_2p_5 - p_4p_2p_5 \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} P(F|C_1^c) &= P(C_2C_5 \cup C_2C_3C_4) \\ &= p_2p_5 + p_2p_3p_4 - p_2p_3p_4p_5 \end{aligned}$$

Portanto, para a letra (a), obtemos

$$P(F) = p_1(p_4 + p_2p_5 - p_4p_2p_5) + (1 - p_1)p_2(p_5 + p_3p_4 - p_3p_4p_5)$$

Para a letra (b), faça $q_i = 1 - p_i$. Então

$$\begin{aligned} P(C_3|F) &= P(F|C_3)P(C_3)/P(F) \\ &= p_3[1 - P(C_1^cC_2^c \cup C_4^cC_5^c)]/P(F) \\ &= p_3(1 - q_1q_2 - q_4q_5 + q_1q_2q_4q_5)/P(F) \end{aligned}$$

- 3.17** Suponha que A seja o evento em que o componente 1 está funcionando, e F seja o evento em que o sistema funciona.

(a)

$$P(A|F) = \frac{P(AF)}{P(F)} = \frac{P(A)}{P(F)} = \frac{1/2}{1 - (1/2)^2} = \frac{2}{3}$$

onde $P(F)$ foi calculada notando-se que esta probabilidade é igual a 1 menos a probabilidade de que ambos os componentes apresentem falhas.

(b)

$$P(A|F) = \frac{P(AF)}{P(F)} = \frac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \frac{(3/4)(1/2)}{(1/2)^3 + 3(1/2)^3} = \frac{3}{4}$$

onde $P(F)$ foi calculada notando-se que esta probabilidade é igual à probabilidade de que 3 componentes funcionem mais as três probabilidades relacionadas a exatamente 2 dos componentes funcionando.

3.18 Se supomos que os resultados das rodadas sucessivas são independentes, então a probabilidade condicional do próximo resultado não é alterada pelo resultado das 10 rodadas anteriores.

3.19 Condicione no resultado das jogadas iniciais

$$P(A \text{ ímpar}) = P_1(1 - P_2)(1 - P_3) + (1 - P_1)P_2P_3 + P_1P_2P_3(A \text{ ímpar}) \\ + (1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3)P(A \text{ ímpar})$$

então,

$$P(A \text{ ímpar}) = \frac{P_1(1 - P_2)(1 - P_3) + (1 - P_1)P_2P_3}{P_1 + P_2 + P_3 - P_1P_2 - P_1P_3 - P_2P_3}$$

3.20 Suponha que A e B sejam os eventos em que a primeira e a segunda tentativa são as maiores, respectivamente. Também, suponha que E seja o evento em que os resultados das tentativas são iguais. Então

$$1 = P(A) + P(B) + P(E)$$

Mas, por simetria, $P(A) = P(B)$; logo,

$$P(B) = \frac{1 - P(E)}{2} = \frac{1 - \sum_{i=1}^n p_i^2}{2}$$

Outra maneira de se resolver o problema é notar que

$$P(B) = \sum_i \sum_{j>i} P(\text{primeira tentativa resulta em } i, \text{ segunda tentativa resulta em } j) \\ = \sum_i \sum_{j>i} p_i p_j$$

Para ver que as duas expressões deduzidas para $P(B)$ são iguais, observe que

$$1 = \sum_{i=1}^n p_i \sum_{j=1}^n p_j \\ = \sum_i \sum_j p_i p_j \\ = \sum_i p_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} p_i p_j \\ = \sum_i p_i^2 + 2 \sum_i \sum_{j>i} p_i p_j$$

3.21 Suponha que $E = \{A \text{ obtém mais caras que } B\}$; então

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E|A \text{ lidera após ambos jogarem } n \text{ vezes})P(A \text{ lidera após ambos jogarem } n \text{ vezes}) \\ &\quad + P(E|\text{empate após ambos jogarem } n \text{ vezes})P(\text{empate após ambos jogarem } n \text{ vezes}) \\ &\quad + P(E|B \text{ lidera após ambos jogarem } n \text{ vezes})P(B \text{ lidera após ambos jogarem } n \text{ vezes}) \\ &= P(A \text{ lidera}) + \frac{1}{2}P(\text{empate}) \end{aligned}$$

Agora, por simetria,

$$\begin{aligned} P(A \text{ lidera}) &= P(B \text{ lidera}) \\ &= \frac{1 - P(\text{empate})}{2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$P(E) = \frac{1}{2}$$

3.22 (a) Falso: Lançados 2 dados, suponha que $E = \{\text{soma} = 7\}$, $F = \{\text{não aparece um 4 no 1º dado}\}$, e $G = \{\text{não aparece um 3 no 2º dado}\}$. Então,

$$P(E|F \cup G) = \frac{P\{7, \text{não } (4, 3)\}}{P\{\text{não } (4, 3)\}} = \frac{5/36}{35/36} = 5/35 \neq P(E)$$

(b)

$$\begin{aligned} P(E(F \cup G)) &= P(EF \cup EG) \\ &= P(EF) + P(EG) \quad \text{já que } EFG = \emptyset \\ &= P(E)[P(F) + P(G)] \\ &= P(E)P(F \cup G) \quad \text{já que } FG = \emptyset \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(G|EF) &= \frac{P(EFG)}{P(EF)} \\ &= \frac{P(E)P(FG)}{P(EF)} \quad \text{já que } E \text{ é independente de } FG \\ &= \frac{P(E)P(F)P(G)}{P(E)P(F)} \quad \text{pela independência} \\ &= P(G). \end{aligned}$$

3.23 (a) necessariamente falso; se eles fossem mutuamente exclusivos, então teríamos

$$0 = P(AB) \neq P(A)P(B)$$

(b) necessariamente falso; se eles fosse independentes, então teríamos

$$P(AB) = P(A)P(B) > 0$$

(c) necessariamente falso; se eles fossem mutuamente exclusivos, então teríamos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1,2$$

(d) possivelmente verdade

3.24 As probabilidades nas letras (a), (b) e (c) são 0,5, $(0,8)^3 = 0,512$, e $(0,9)^7 = 0,4783$, respectivamente.

3.25 Suponha que D_i , $i = 1, 2$, represente o evento em que o rádio i apresenta defeito. Suponha também que A e B sejam os eventos em que os rádios tenham sido produzidos pelas fábricas A e B , respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} P(D_2|D_1) &= \frac{P(D_1 D_2)}{P(D_1)} \\ &= \frac{P(D_1 D_2|A)P(A) + P(D_1 D_2|B)P(B)}{P(D_1|A)P(A) + P(D_1|B)P(B)} \\ &= \frac{(0,05)^2(1/2) + (0,01)^2(1/2)}{(0,05)(1/2) + (0,01)(1/2)} \\ &= 13/300 \end{aligned}$$

3.26 Sabemos que $P(AB) = P(B)$, e devemos mostrar que isso implica que $P(B^c A^c) = P(A^c)$. Uma maneira é a seguinte:

$$\begin{aligned} P(B^c A^c) &= P((A \cup B)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= 1 - P(A) \\ &= P(A^c) \end{aligned}$$

3.27 O resultado é verdadeiro para $n = 0$. Com A_i representando o evento em que há i bolas vermelhas na urna após a n -ésima rodada, suponha que

$$P(A_i) = \frac{1}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n+1$$

Agora, suponha que B_j , $j = 1, \dots, n+2$, represente o evento em que há j bolas vermelhas na urna após a $(n+1)$ -ésima rodada. Então,

$$\begin{aligned} P(B_j) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(B_j|A_i)P(A_i) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} P(B_j|A_i) \\ &= \frac{1}{n+1} [P(B_j|A_{j-1}) + P(B_j|A_j)] \end{aligned}$$

Como há $n+2$ bolas na urna após a n -ésima rodada, tem-se que $P(B_j|A_{j-1})$ é a probabilidade de que uma bola vermelha seja escolhida quando $j-1$ das $n+2$ bolas na urna são vermelhas, e $P(B_j|A_j)$ é a probabilidade de que uma bola vermelha não seja escolhida quando j das $n+2$ bolas na urna são vermelhas. Consequentemente,

$$P(B_j|A_{j-1}) = \frac{j-1}{n+2}, \quad P(B_j|A_j) = \frac{n+2-j}{n+2}$$

Substituindo esses resultados na equação para $P(B_j)$, obtemos

$$P(B_j) = \frac{1}{n+1} \left[\frac{j-1}{n+2} + \frac{n+2-j}{n+2} \right] = \frac{1}{n+2}$$

o que completa a demonstração por indução.

3.28 Se A_i é o evento em que o jogador i recebe um ás, então

$$P(A_i) = 1 - \frac{\binom{2n-2}{n}}{\binom{2n}{n}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{n-1}{2n-1} = \frac{3n-1}{4n-2}$$

Numerando os ases arbitrariamente e observando que o jogador que não recebe o primeiro ás receberá n das $2n-1$ cartas restantes, vemos que

$$P(A_1 A_2) = \frac{n}{2n-1}$$

Portanto,

$$P(A_2^c | A_1) = 1 - P(A_2 | A_1) = 1 - \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} = \frac{n-1}{3n-1}$$

Podemos considerar o resultado da divisão de cartas como o resultado de duas tentativas, onde se diz que a tentativa i , $i = 1, 2$, é um sucesso se o ás número i vai para o primeiro jogador. Como as posições dos dois ases se tornam independentes à medida que n tende a infinito, com cada um deles possuindo a mesma probabilidade de ser dado a qualquer jogador, tem-se que as tentativas se tornam independentes, cada uma com probabilidade de sucesso $1/2$. Portanto, no caso limite onde $n \rightarrow \infty$, o problema se torna aquele de determinar a probabilidade condicional de que se obtenham duas caras, dado que pelo menos uma seja obtida, quando duas moedas são jogadas. Como $\frac{n-1}{3n-1}$ converge para $1/3$, a resposta concorda com aquela do Exemplo 2b.

3.29 (a) Para qualquer permutação $i_1, \dots, i_n$ de $1, 2, \dots, n$, a probabilidade de que os tipos sucessivos coletados sejam do tipo $i_1, \dots, i_n$ é igual a $p_{i_1} \cdots p_{i_n} = \prod_{i=1}^n p_i$. Consequentemente, a probabilidade desejada é igual a $n! \prod_{i=1}^n p_i$.

(b) Para $i_1, \dots, i_k$ todos distintos,

$$P(E_{i_1} \cdots E_{i_k}) = \left(\frac{n-k}{n} \right)^n$$

o que se obtém porque não há cupons de tipos $i_1, \dots, i_k$ quando cada uma das n seleções independentes envolve um dos demais $n-k$ tipos. Obtém-se agora pela identidade inclusão-exclusão que

$$P(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n} \right)^n$$

Como $1 - P(\cup_{i=1}^n E_i)$ é a probabilidade de que um de cada tipo seja obtido, pela letra (b) tem-se que ela é igual a $\frac{n!}{n^n}$. Substituindo esse resultado na equação anterior, obtemos

$$1 - \frac{n!}{n^n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n} \right)^n$$

ou

$$n! = n^n - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^n$$

ou

$$n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$$

3.30

$$P(E|E \cup F) = P(E|F(E \cup F))P(F|E \cup F) + P(E|F^c(E \cup F))P(F^c|E \cup F)$$

Usando

$$F(E \cup F) = F \cap F^c(E \cup F) = F^c E$$

obtemos

$$\begin{aligned} P(E|E \cup F) &= P(E|F)P(F|E \cup F) + P(E|F^c E)P(F^c|E \cup F) \\ &= P(E|F)P(F|E \cup F) + P(F^c|E \cup F) \\ &\geq P(E|F)P(F|E \cup F) + P(E|F)P(F^c|E \cup F) \\ &= P(E|F) \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

4.1 Como a soma das probabilidades é igual a 1, devemos ter $4P\{X = 3\} + 0,5 = 1$, o que implica que $P\{X = 0\} = 0,375$, $P\{X = 3\} = 0,125$. Portanto, $E[X] = 1(0,3) + 2(0,2) + 3(0,125) = 1,075$.

4.2 A relação implica que $p_i = c^i p_0$, $i = 1, 2$, onde $p_i = P\{X = i\}$. Como a soma dessas probabilidades é igual a 1, tem-se que

$$p_0(1 + c + c^2) = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{1 + c + c^2}$$

Portanto,

$$E[X] = p_1 + 2p_2 = \frac{c + 2c^2}{1 + c + c^2}$$

4.3 Seja X o número de jogadas. Então a função de probabilidade de X é

$$p_2 = p^2 + (1-p)^2, \quad p_3 = 1 - p_2 = 2p(1-p)$$

Portanto,

$$E[X] = 2p_2 + 3p_3 = 2p_2 + 3(1 - p_2) = 3 - p^2 - (1-p)^2$$

4.4 A probabilidade de que uma família escolhida aleatoriamente tenha i filhos é n_i/m . Logo,

$$E[X] = \sum_{i=1}^r i n_i / m$$

Também, como há in_i filhos em famílias com i filhos, tem-se que a probabilidade de que um filho aleatoriamente escolhido seja de uma família com i filhos é dada por $in_i / \sum_{i=1}^r in_i$. Portanto,

$$E[Y] = \frac{\sum_{i=1}^r i^2 n_i}{\sum_{i=1}^r in_i}$$

Logo, devemos mostrar que

$$\frac{\sum_{i=1}^r i^2 n_i}{\sum_{i=1}^r in_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^r in_i}{\sum_{i=1}^r n_i}$$

ou, equivalentemente, que

$$\sum_{j=1}^r n_j \sum_{i=1}^r i^2 n_i \geq \sum_{i=1}^r in_i \sum_{j=1}^r j n_j$$

ou, equivalentemente, que

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r i^2 n_i n_j \geq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r ij n_i n_j$$

Mas, para um par fixo i, j , o coeficiente de $n_i n_j$ no lado esquerdo da soma da desigualdade anterior é $i^2 + j^2$, enquanto o coeficiente no lado direito da soma é $2ij$. Portanto, é suficiente mostrar que

$$i^2 + j^2 \geq 2ij$$

o que procede porque $(i - j)^2 \geq 0$.

4.5 Seja $p = P\{X = 1\}$. Então $E[X] = p$ e $\text{Var}(X) = p(1 - p)$, assim

$$p = 3p(1 - p)$$

o que implica que $p = 2/3$. Portanto, $P\{X = 0\} = 1/3$.

4.6 Se você aposta x podendo ganhar a quantia apostada com probabilidade p e perder esta quantia com probabilidade $1 - p$, então seu ganho esperado é

$$xp - x(1 - p) = (2p - 1)x$$

que é positivo (e crescente em x) se e somente se $p > 1/2$. Assim, se $p \leq 1/2$, maximiza-se o retorno esperado apostando-se 0, e se $p > 1/2$, maximiza-se o retorno esperado apostando-se o máximo valor possível. Portanto, se é sabido que a moeda de 0,6 foi escolhida, então você deve apostar 10. Por outro lado, se é sabido que a moeda de 0,3 foi escolhida, então você deve apostar 0. Com isso, seu retorno esperado é

$$\frac{1}{2}(1,2 - 1)10 + \frac{1}{2}0 - C = 1 - C$$

Como o seu retorno esperado é 0 caso você não tenha a informação (porque nesse caso a probabilidade de vitória é de $\frac{1}{2}(0,6) + \frac{1}{2}(0,3) < \frac{1}{2}$), tem-se que, se a informação custar menos que 1, então ela vale a compra.

- 4.7 (a) Se você virar o papel vermelho e ver o valor x , então o seu retorno esperado se você mudar para o papel azul é

$$2x(1/2) + x/2(1/2) = 5x/4 > x$$

Assim, é sempre melhor mudar de papel.

- (b) Suponha que o filantropo escreva o valor x no papel vermelho. Então o valor no papel azul é $2x$ ou $x/2$. Observe que, se $x/2 \geq y$, então o valor no papel azul será pelo menos igual a y , e com isso será aceito. Neste caso, portanto, a recompensa tem a mesma probabilidade de ser $2x$ ou $x/2$. Assim,

$$E[R_y(x)] = 5x/4, \quad \text{se } x/2 \geq y$$

Se $x/2 < y \leq 2x$, então o papel azul será aceito se o seu valor for $2x$ e rejeitado se o seu valor for $x/2$. Portanto,

$$E[R_y(x)] = 2x(1/2) + x(1/2) = 3x/2 \quad \text{se } x/2 < y \leq 2x$$

Finalmente, se $2x < y$, então o papel azul será rejeitado. Neste caso, portanto, a recompensa é x . Assim,

$$R_y(x) = x, \quad \text{se } 2x < y$$

Isto é, mostramos que quando o valor x está escrito no papel vermelho, o retorno esperado é

$$E[R_y(x)] = \begin{cases} x & \text{se } x < y/2 \\ 3x/2 & \text{se } y/2 \leq x < 2y \\ 5x/4 & \text{se } x \geq 2y \end{cases}$$

- 4.8 Suponha que n tentativas independentes, cada uma com probabilidade de sucesso p , sejam realizadas. Então, o número de sucessos será menor ou igual a i se e somente se o número de fracassos for maior ou igual a $n - i$. Mas como cada tentativa é um fracasso com probabilidade $1 - p$, resulta que o número de fracassos é uma variável aleatória binomial com parâmetros n e $1 - p$. Portanto,

$$\begin{aligned} P\{\text{cesto}(n, p) \leq i\} &= P\{\text{cesto}(n, 1 - p) \geq n - i\} \\ &= 1 - P\{\text{cesto}(n, 1 - p) \leq n - i - 1\} \end{aligned}$$

A igualdade final resulta do fato de que a probabilidade do número de fracassos ser maior ou igual a $n - i$ é igual a 1 menos a probabilidade de que ela seja menor que $n - i$.

- 4.9 Como $E[X] = np$, $\text{Var}(X) = np(1 - p)$ e sabemos que $np = 6$, temos $np(1 - p) = 2,4$. Assim, $1 - p = 0,4$, ou $p = 0,6$, $n = 10$. Com isso,

$$P\{X = 5\} = \binom{10}{5} (0,6)^5 (0,4)^5$$

- 4.10 Suponha que X_i , $i = 1, \dots, m$, represente o número da i -ésima bola retirada. Então,

$$\begin{aligned} P\{X \leq k\} &= P\{X_1 \leq k, X_2 \leq k, \dots, X_m \leq k\} \\ &= P\{X_1 \leq k\} P\{X_2 \leq k\} \cdots P\{X_m \leq k\} \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^m \end{aligned}$$

Portanto,

$$P\{X = k\} = P\{X \leq k\} - P\{X \leq k - 1\} = \left(\frac{k}{n}\right)^m - \left(\frac{k-1}{n}\right)^m$$

- 4.11 (a) Dado que o time A vence a primeira partida, ele vencerá a série se, a partir daí, vencer 2 partidas antes do time B vencer 3 partidas. Assim,

$$P\{A \text{ vence} | A \text{ vence primeiro}\} = \sum_{i=2}^4 \binom{4}{i} p^i (1-p)^{4-i}$$

(b)

$$\begin{aligned} P\{A \text{ vence primeiro} | A \text{ vence}\} &= \frac{P\{A \text{ vence} | A \text{ vence primeiro}\} P\{A \text{ vence primeiro}\}}{P\{A \text{ vence}\}} \\ &= \frac{\sum_{i=2}^4 \binom{4}{i} p^{i+1} (1-p)^{4-i}}{\sum_{i=3}^5 \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i}} \end{aligned}$$

- 4.12 Para obter a solução, condicione no time vencer ou não neste final de semana

$$0,5 \sum_{i=3}^4 \binom{4}{i} (0,4)^i (0,6)^{4-i} + 0,5 \sum_{i=3}^4 \binom{4}{i} (0,7)^i (0,3)^{4-i}$$

- 4.13 Suponha que C seja o evento em que os jurados tomam a decisão correta e F o evento em que quatro dos juizes tem a mesma opinião que os jurados. Então,

$$P(C) = \sum_{i=4}^7 \binom{7}{i} (0,7)^i (0,3)^{7-i}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} P(C|F) &= \frac{P(CF)}{P(F)} \\ &= \frac{\binom{7}{4} (0,7)^4 (0,3)^3}{\binom{7}{4} (0,7)^4 (0,3)^3 + \binom{7}{3} (0,7)^3 (0,3)^4} \\ &= 0,7 \end{aligned}$$

- 4.14 Supondo que o número de furacões possa ser aproximado por uma variável aleatória de Poisson, obtemos a solução

$$\sum_{i=0}^3 e^{-5,2} (5,2)^i / i!$$

4.15

$$\begin{aligned}
 E[Y] &= \sum_{i=1}^{\infty} iP\{X = i\}/P\{X > 0\} \\
 &= E[X]/P\{X > 0\} \\
 &= \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}
 \end{aligned}$$

4.16 (a) $1/n$ (b) Suponha que D seja o evento em que as garotas i e j selecionam garotos diferentes. Então

$$\begin{aligned}
 P(G_i G_j) &= P(G_i G_j | D)P(D) + P(G_i G_j | D^c)P(D^c) \\
 &= (1/n)^2(1 - 1/n) \\
 &= \frac{n-1}{n^3}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$P(G_i | G_j) = \frac{n-1}{n^2}$$

(c), (d) Como, quando n é grande, $P(G_i | G_j)$ é pequena e aproximadamente igual a $P(G_i)$, resulta do paradigma de Poisson que o número de casais tem aproximadamente uma distribuição de Poisson com média $\sum_{i=1}^n P(G_i) = 1$. Portanto, $P_0 \approx e^{-1}$ e $P_k \approx e^{-1}/k!$ (e) Para determinar a probabilidade de que um dado conjunto de k garotas possua garotos que tenham todas elas formado pares, condicione na ocorrência de D , onde D é o evento em que todas elas escolhem garotos diferentes. Isso dá

$$\begin{aligned}
 P(G_{i_1} \cdots G_{i_k}) &= P(G_{i_1} \cdots G_{i_k} | D)P(D) + P(G_{i_1} \cdots G_{i_k} | D^c)P(D^c) \\
 &= P(G_{i_1} \cdots G_{i_k} | D)P(D) \\
 &= (1/n)^k \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \\
 &= \frac{n!}{(n-k)!n^{2k}}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} P(G_{i_1} \cdots G_{i_k}) = \binom{n}{k} P(G_{i_1} \cdots G_{i_k}) = \frac{n!n!}{(n-k)!(n-k)!k!n^{2k}}$$

e a identidade da inclusão-exclusão implica

$$1 - P_0 = P(\cup_{i=1}^n G_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!n!}{(n-k)!(n-k)!k!n^{2k}}$$

- 4.17 (a) Como uma mulher i tem a mesma probabilidade de formar um par com qualquer uma das $2n - 1$ pessoas, $P(W_i) = \frac{1}{2n-1}$
 (b) Como, dado W_i , a mulher i tem a mesma probabilidade de formar um par com qualquer uma das $2n - 3$ pessoas, $P(W_i|W_j) = \frac{1}{2n-3}$
 (c) Quando n é grande, o número de esposas que formam pares com seus maridos é aproximadamente uma variável de Poisson com média $\sum_{i=1}^n P(W_i) = \frac{n}{2n-1} \approx 1/2$. Portanto, a probabilidade de que não ocorra tal par é aproximadamente igual a $e^{-1/2}$.
 (d) Ele se reduz ao problema do pareamento.

4.18 (a) $\binom{8}{3} (9/19)^3 (10/19)^5 (9/19) = \binom{8}{3} (9/19)^4 (10/19)^5$

- (b) Se W é o seu número final de vitórias e X é o número de apostas que ela faz, então, como ela terá ganhado 4 apostas e perdido $X - 4$, tem-se que

$$W = 20 - 5(X - 4) = 40 - 5X$$

Portanto,

$$E[W] = 40 - 5E[X] = 40 - 5[4/(9/19)] = -20/9$$

- 4.19 A probabilidade de que uma rodada não resulte em alguém obtendo um resultado diferente dos demais é igual a $1/4$, que é a probabilidade de que todas as três moedas caíam no mesmo lado.

(a) $(1/4)^2(3/4) = 3/64$

(b) $(1/4)^4 = 1/256$

- 4.20 Seja $q = 1 - p$. Então

$$\begin{aligned} E[1/X] &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} q^{i-1} p \\ &= \frac{p}{q} \sum_{i=1}^{\infty} q^i / i \\ &= \frac{p}{q} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^q x^{i-1} dx \\ &= \frac{p}{q} \int_0^q \sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1} dx \\ &= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-x} dx \\ &= \frac{p}{q} \int_p^1 \frac{1}{y} dy \\ &= -\frac{p}{q} \log(p) \end{aligned}$$

- 4.21 Como $\frac{X-b}{a-b}$ será igual a 1 com probabilidade p ou 0 com probabilidade $1-p$, verificamos que ela é uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro p . Como a variância de tal variável aleatória é $p(1-p)$, temos

$$p(1-p) = \text{Var} \left(\frac{X-b}{a-b} \right) = \frac{1}{(a-b)^2} \text{Var}(X-b) = \frac{1}{(a-b)^2} \text{Var}(X)$$

Portanto,

$$\text{Var}(X) = (a - b)^2 p(1 - p)$$

- 4.22** Suponha que X represente o número partidas que você joga, e Y , o número de partidas perdidas.

(a) Após o seu quarto jogo, você continua a jogar até perder. Portanto, $X - 4$ é uma variável aleatória geométrica com parâmetro $1 - p$. Assim,

$$E[X] = E[4 + (X - 4)] = 4 + E[X - 4] = 4 + \frac{1}{1 - p}$$

(b) Se Z representa o número de perdas que você tem nas primeiras 4 partidas, então Z é uma variável aleatória binomial com parâmetros 4 e $1 - p$. Como $Y = Z + 1$, temos

$$E[Y] = E[Z + 1] = E[Z] + 1 = 4(1 - p) + 1$$

- 4.23** Um total de n bolas brancas serão retiradas antes de m bolas pretas se e somente se houver pelo menos n bolas brancas nas primeiras $n + m - 1$ bolas retiradas (compare com o *problema dos pontos*, Exemplo 4j do Capítulo 3). Com X igual ao número de bolas brancas entre as primeiras $n + m - 1$ bolas retiradas, X é uma variável aleatória hipergeométrica. Com isso, obtemos

$$P\{X \geq n\} = \sum_{i=n}^{n+m-1} P\{X = i\} = \sum_{i=n}^{n+m-1} \frac{\binom{N}{i} \binom{M}{n+m-1-i}}{\binom{N+M}{n+m-1}}$$

- 4.24** Como cada bola vai independentemente para a urna i com uma mesma probabilidade p_i , verificamos que X_i é uma variável aleatória binomial com parâmetros $n = 10$, $p = p_i$.

Note primeiro que $X_i + X_j$ é o número de bolas que vão para a urna i ou j . Então, como cada uma das 10 bolas vai independentemente para uma dessas urnas com probabilidade $p_i + p_j$, é possível concluir que $X_i + X_j$ é uma variável aleatória binomial com parâmetros 10 e $p_i + p_j$.

Pela mesma lógica, $X_1 + X_2 + X_3$ é uma variável aleatória binomial com parâmetros 10 e $p_1 + p_2 + p_3$. Portanto,

$$P\{X_1 + X_2 + X_3 = 7\} = \binom{10}{7} (p_1 + p_2 + p_3)^7 (p_4 + p_5)^3$$

- 4.25** Seja $X_i = 1$ se a pessoa i achar o seu chapéu, e $X_i = 0$ caso contrário. Então,

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

é o número de pareamentos. Calculando esperanças, obtemos

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n P\{X_i = 1\} = \sum_{i=1}^n 1/n = 1$$

onde a última igualdade é obtida porque a pessoa i tem a mesma probabilidade de ficar com qualquer um dos n chapéus.

Para calcular $\text{Var}(X)$, usamos a Equação (9.1), que diz que

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^n E[X_i] + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} E[X_i X_j]$$

Agora, para $i \neq j$,

$$E[X_i X_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\} = P\{X_i = 1\}P\{X_j = 1|X_i = 1\} = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + n(n-1) \frac{1}{n(n-1)} = 2 \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\text{Var}(X) = 2 - 1^2 = 1$$

4.26 Com $q = 1 - p$, temos, por um lado,

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = 2i\} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} pq^{2i-1} \\ &= pq \sum_{i=1}^{\infty} (q^2)^{i-1} \\ &= pq \frac{1}{1 - q^2} \\ &= \frac{pq}{(1-q)(1+q)} = \frac{q}{1+q} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$P(E) = P(E|X=1)p + P(E|X>1)q = qP(E|X>1)$$

Entretanto, dado que a primeira tentativa não é um sucesso, o número de tentativas necessárias para que ocorra um sucesso é 1 mais o número geometricamente distribuído de tentativas adicionais necessárias. Portanto,

$$P(E|X>1) = P(X+1 \text{ é par}) = P(E^c) = 1 - P(E)$$

o que resulta em $P(E) = q/(1+q)$.

CAPÍTULO 5

5.1 Seja X o número de minutos jogados.

- (a) $P\{X > 15\} = 1 - P\{X \leq 15\} = 1 - 5(0,025) = 0,875$
- (b) $P\{20 < X < 35\} = 10(0,05) + 5(0,025) = 0,625$
- (c) $P\{X < 30\} = 10(0,025) + 10(0,05) = 0,75$
- (d) $P\{X > 36\} = 4(0,025) = 0,1$

5.2 (a) $1 = \int_0^1 cx^n dx = c/(n+1) \Rightarrow c = n+1$

(b) $P\{X > x\} = (n+1) \int_x^1 x^n dx = x^{n+1} \Big|_x^1 = 1 - x^{n+1}$

5.3 Primeiro, vamos determinar c usando

$$1 = \int_0^2 cx^4 dx = 32c/5 \Rightarrow c = 5/32$$

(a) $E[X] = \frac{5}{32} \int_0^2 x^5 dx = \frac{5}{32} \frac{64}{6} = 5/3$

(b) $E[X^2] = \frac{5}{32} \int_0^2 x^6 dx = \frac{5}{32} \frac{128}{7} = 20/7 \Rightarrow \text{Var}(X) = 20/7 - (5/3)^2 = 5/63$

5.4 Como

$$1 = \int_0^1 (ax + bx^2) dx = a/2 + b/3$$

$$0,6 = \int_0^1 (ax^2 + bx^3) dx = a/3 + b/4$$

obtemos $a = 3,6$ e $b = -2,4$. Portanto,

(a) $P\{X < 1/2\} = \int_0^{1/2} (3,6x - 2,4x^2) dx = (1,8x^2 - 0,8x^3) \Big|_0^{1/2} = 0,35$

(b) $E[X^2] = \int_0^1 (3,6x^3 - 2,4x^4) dx = 0,42 \Rightarrow \text{Var}(X) = 0,06$

5.5 Para $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} P\{X = i\} &= P\{\text{Int}(nU) = i-1\} \\ &= P\{i-1 \leq nU < i\} \\ &= P\left\{\frac{i-1}{n} \leq U < \frac{i}{n}\right\} \\ &= 1/n \end{aligned}$$

5.6 Se você faz uma proposta x , $70 \leq x \leq 140$, então ou você ganhará a concorrência e terá um lucro de $x - 100$ com probabilidade $(140 - x)/70$, ou perderá a concorrência e fará um lucro de 0, caso contrário. Portanto, o seu lucro esperado se você fizer uma proposta x é

$$\frac{1}{70}(x-100)(140-x) = \frac{1}{70}(240x - x^2 - 14000)$$

Derivando e igualando a 0, obtemos

$$240 - 2x = 0$$

Portanto, você deve fazer uma proposta de 120 mil reais. Seu lucro esperado será de 40/7 mil reais.

5.7 (a) $P\{U > 0,1\} = 9/10$

(b) $P\{U > 0,2|U > 0,1\} = P\{U > 0,2\}/P\{U > 0,1\} = 8/9$

(c) $P\{U > 0,3|U > 0,2, U > 0,1\} = P\{U > 0,3\}/P\{U > 0,2\} = 7/8$

(d) $P\{U > 0,3\} = 7/10$

A resposta para a letra (d) também poderia ter sido obtida multiplicando-se as probabilidades das letras (a), (b) e (c).

5.8 Suponha que X seja a nota do teste, e considere $Z = (X - 100)/15$. Note que Z é uma variável aleatória normal padrão.

(a) $P\{X > 125\} = P\{Z > 25/15\} \approx 0,0478$

(b)
$$\begin{aligned} P\{90 < X < 110\} &= P\{-10/15 < Z < 10/15\} \\ &= P\{Z < 2/3\} - P\{Z < -2/3\} \\ &= P\{Z < 2/3\} - [1 - P\{Z < 2/3\}] \\ &\approx 0,4950 \end{aligned}$$

5.9 Suponha que X seja o tempo de viagem. Queremos determinar x tal que

$$P\{X > x\} = 0,05$$

o que é equivalente a

$$P\left\{\frac{X - 40}{7} > \frac{x - 40}{7}\right\} = 0,05$$

Isto é, precisamos determinar x tal que

$$P\left\{Z > \frac{x - 40}{7}\right\} = 0,05$$

onde Z é uma variável aleatória normal padrão. Mas

$$P\{Z > 1,645\} = 0,05$$

Logo,

$$\frac{x - 40}{7} = 1,645 \text{ ou } x = 51,515$$

Portanto, você não deve sair depois de 8,485 minutos após o meio-dia.

5.10 Seja X o tempo de vida do pneu em unidades de milhares de km, e suponha que $Z = (X - 34)/4$. Note que Z é uma variável aleatória normal padrão.

(a) $P\{X > 40\} = P\{Z > 1,5\} \approx 0,0668$

(b) $P\{30 < X < 35\} = P\{-1 < Z < 0,25\} = P\{Z < 0,25\} - P\{Z > 1\} \approx 0,44$

(c)
$$\begin{aligned} P\{X > 40 | X > 30\} &= P\{X > 40\} / P\{X > 30\} \\ &= P\{Z > 1,5\} / P\{Z > -1\} \approx 0,079 \end{aligned}$$

5.11 Suponha que X seja o índice pluviométrico do próximo ano e que $Z = (X - 40,2)/8,4$.

(a) $P\{X > 44\} = P\{Z > 3,8/8,4\} = P\{Z > 0,4524\} \approx 0,3255$

(b) $\left(\frac{7}{3}\right)(0,3255)^3(0,6745)^4$

5.12 Suponha que M_i e W_i representem, respectivamente, os números de homens e mulheres nas amostras que ganham, em milhares de reais, pelo menos i por ano. Também, seja Z uma variável aleatória normal padrão.

(a)

$$\begin{aligned} P\{W_{25} \geq 70\} &= P\{W_{25} \geq 69,5\} \\ &= P\left\{ \frac{W_{25} - 200(0,34)}{\sqrt{200(0,34)(0,66)}} \geq \frac{69,5 - 200(0,34)}{\sqrt{200(0,34)(0,66)}} \right\} \\ &\approx P\{Z \geq 0,2239\} \\ &\approx 0,4114 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P\{M_{25} \leq 120\} &= P\{M_{25} \leq 120,5\} \\ &= P\left\{ \frac{M_{25} - (200)(0,587)}{\sqrt{(200)(0,587)(0,413)}} \leq \frac{120,5 - (200)(0,587)}{\sqrt{(200)(0,587)(0,413)}} \right\} \\ &\approx P\{Z \leq 0,4452\} \\ &\approx 0,6719 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P\{M_{20} \geq 150\} &= P\{M_{20} \geq 149,5\} \\ &= P\left\{ \frac{M_{20} - (200)(0,745)}{\sqrt{(200)(0,745)(0,255)}} \geq \frac{149,5 - (200)(0,745)}{\sqrt{(200)(0,745)(0,255)}} \right\} \\ &\approx P\{Z \geq 0,0811\} \\ &\approx 0,4677 \\ P\{W_{20} \geq 100\} &= P\{W_{20} \geq 99,5\} \\ &= P\left\{ \frac{W_{20} - (200)(0,534)}{\sqrt{(200)(0,534)(0,466)}} \geq \frac{99,5 - (200)(0,534)}{\sqrt{(200)(0,534)(0,466)}} \right\} \\ &\approx P\{Z \geq -1,0348\} \\ &= \approx 0,8496 \end{aligned}$$

Portanto,

$$P\{M_{20} \geq 150\}P\{W_{20} \geq 100\} \approx 0,3974$$

5.13 A propriedade de falta de memória da distribuição exponencial resulta em $e^{-4/5}$.

5.14 (a) $e^{-2^2} = e^{-4}$

(b) $F(3) - F(1) = e^{-1} - e^{-9}$

(c) $\lambda(t) = 2te^{-t^2}/e^{-t^2} = 2t$

(d) Seja Z uma variável aleatória normal padrão. Use a identidade $E[X] = \int_0^\infty P\{X > x\} dx$ para obter

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty e^{-x^2} dx \\ &= 2^{-1/2} \int_0^\infty e^{-y^2/2} dy \\ &= 2^{-1/2} \sqrt{2\pi} P\{Z > 0\} \\ &= \sqrt{\pi}/2 \end{aligned}$$

(e) Use o resultado do Exercício Teórico 5.5 para obter

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} 2xe^{-x^2} dx = -e^{-x^2} \Big|_0^{\infty} = 1$$

Portanto, $\text{Var}(X) = 1 - \pi/4$.

5.15 (a) $P\{X > 6\} = \exp\{-\int_0^6 \lambda(t)dt\} = e^{-3,45}$

(b)

$$\begin{aligned} P\{X < 8 | X > 6\} &= 1 - P\{X > 8 | X > 6\} \\ &= 1 - P\{X > 8\} / P\{X > 6\} \\ &= 1 - e^{-5,65} / e^{-3,45} \\ &\approx 0,8892 \end{aligned}$$

5.16 Para $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_{1/X}(x) &= P\{1/X \leq x\} \\ &= P\{X \leq 0\} + P\{X \geq 1/x\} \\ &= 1/2 + 1 - F_X(1/x) \end{aligned}$$

O cálculo da derivada fornece

$$\begin{aligned} f_{1/X}(x) &= x^{-2} f_X(1/x) \\ &= \frac{1}{x^2 \pi (1 + (1/x)^2)} \\ &= f_X(x) \end{aligned}$$

A demonstração para $x < 0$ é similar.

5.17 Se X representa o número das primeiras n apostas que você ganha, então a quantidade que você ganhará após n apostas é

$$35X - (n - X) = 36X - n$$

Logo, queremos determinar

$$p = P\{36X - n > 0\} = P\{X > n/36\}$$

onde X é uma variável aleatória binomial com parâmetros n e $p = 1/38$.

(a) Quando $n = 34$,

$$\begin{aligned} p &= P\{X \geq 1\} \\ &= P\{X > 0,5\} \quad (\text{a correção da continuidade}) \\ &= P\left\{ \frac{X - 34/38}{\sqrt{34(1/38)(37/38)}} > \frac{0,5 - 34/38}{\sqrt{34(1/38)(37/38)}} \right\} \\ &= P\left\{ \frac{X - 34/38}{\sqrt{34(1/38)(37/38)}} > -0,4229 \right\} \\ &\approx \Phi(0,4229) \\ &\approx 0,6638 \end{aligned}$$

(Como você estará na frente após 34 apostas se ganhar pelo menos 1 aposta, a probabilidade exata neste caso é $1 - (37/38)^{34} = 0,5961$).

(b) Quando $n = 1000$,

$$\begin{aligned} p &= P\{X > 27,5\} \\ &= P\left\{\frac{X - 1000/38}{\sqrt{1000(1/38)(37/38)}} > \frac{27,5 - 1000/38}{\sqrt{1000(1/38)(37/38)}}\right\} \\ &\approx 1 - \Phi(0,2339) \\ &\approx 0,4075 \end{aligned}$$

A probabilidade exata – isto é, a probabilidade de que uma variável aleatória binomial com $n = 1000$ e $p = 1/38$ seja maior que 27 – é igual a 0,3961.

(c) Quando $n = 100.000$,

$$\begin{aligned} p &= P\{X > 2777,5\} \\ &= P\left\{\frac{X - 100000/38}{\sqrt{100000(1/38)(37/38)}} > \frac{2777,5 - 100000/38}{\sqrt{100000(1/38)(37/38)}}\right\} \\ &\approx 1 - \Phi(2,883) \\ &\approx 0,0020 \end{aligned}$$

A probabilidade exata é neste caso igual a 0,0021.

5.18 Se X representa o tempo de vida da pilha, então a probabilidade desejada, $P\{X > s + t | X > t\}$, pode ser determinada da maneira a seguir:

$$\begin{aligned} P\{X > s + t | X > t\} &= \frac{P\{X > s + t, X > t\}}{P\{X > t\}} \\ &= \frac{P\{X > s + t\}}{P\{X > t\}} \\ &= \frac{P\{X > s + t | \text{pilha é tipo 1}\}p_1 + P\{X > s + t | \text{pilha é tipo 2}\}p_2}{P\{X > t | \text{pilha é tipo 1}\}p_1 + P\{X > t | \text{pilha é tipo 2}\}p_2} \\ &= \frac{e^{-\lambda_1(s+t)}p_1 + e^{-\lambda_2(s+t)}p_2}{e^{-\lambda_1 t}p_1 + e^{-\lambda_2 t}p_2} \end{aligned}$$

Outra abordagem é condicionar diretamente no tipo de pilha e então usar a propriedade da falta de memória das variáveis aleatórias exponenciais. Isto é, poderíamos fazer o seguinte:

$$\begin{aligned} P\{X > s + t | X > t\} &= P\{X > s + t | X > t, \text{tipo 1}\}P\{\text{tipo 1} | X > t\} \\ &\quad + P\{X > s + t | X > t, \text{tipo 2}\}P\{\text{tipo 2} | X > t\} \\ &= e^{-\lambda_1 s}P\{\text{tipo 1} | X > t\} + e^{-\lambda_2 s}P\{\text{tipo 2} | X > t\} \end{aligned}$$

Agora, para $i = 1, 2$, use

$$\begin{aligned} P\{\text{tipo } i | X > t\} &= \frac{P\{\text{tipo } i, X > t\}}{P\{X > t\}} \\ &= \frac{P\{X > t | \text{tipo } i\}p_i}{P\{X > t | \text{tipo 1}\}p_1 + P\{X > t | \text{tipo 2}\}p_2} \\ &= \frac{e^{-\lambda_i t}p_i}{e^{-\lambda_1 t}p_1 + e^{-\lambda_2 t}p_2} \end{aligned}$$

5.19 Seja X_i uma variável aleatória exponencial com média i , $i = 1, 2$.

(a) O valor de c deve ser tal que $P\{X_1 > c\} = 0,05$. Portanto,

$$e^{-c} = 0,05 = 1/20$$

$$\text{ou } c = \log(20) = 2,996.$$

(b)

$$P\{X_2 > c\} = e^{-c/2} = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0,2236$$

5.20 (a)

$$\begin{aligned} E[(Z - c)^+] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^+ e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} (x - c) e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} x e^{-x^2/2} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} c e^{-x^2/2} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \Big|_c^{\infty} - c(1 - \Phi(c)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2/2} - c(1 - \Phi(c)) \end{aligned}$$

(b) Usando o fato de que X possui a mesma distribuição que $\mu + \sigma Z$, onde Z é uma variável aleatória normal padrão, obtemos

$$\begin{aligned} E[(X - c)^+] &= E[(\mu + \sigma Z - c)^+] \\ &= E\left[\left(\sigma\left(Z - \frac{c - \mu}{\sigma}\right)\right)^+\right] \\ &= E\left[\sigma\left(Z - \frac{c - \mu}{\sigma}\right)^+\right] \\ &= \sigma E\left[\left(Z - \frac{c - \mu}{\sigma}\right)^+\right] \\ &= \sigma \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} - a(1 - \Phi(a)) \right] \end{aligned}$$

$$\text{onde } a = \frac{c - \mu}{\sigma}.$$

CAPÍTULO 6

6.1 (a) $3C + 6C = 1 \Rightarrow C = 1/9$

(b) Seja $p(i, j) = P\{X = i, Y = j\}$. Então

$$p(1, 1) = 4/9, p(1, 0) = 2/9, P(0, 1) = 1/9, p(0, 0) = 2/9$$

$$(c) \frac{(12)!}{2^6} (1/9)^6 (2/9)^6$$

$$(d) \frac{(12)!}{(4!)^3} (1/3)^{12}$$

$$(e) \sum_{i=8}^{12} \binom{12}{i} (2/3)^i (1/3)^{12-i}$$

6.2 (a) Com $p_j = P\{XYZ = j\}$, temos

$$p_6 = p_2 = p_4 = p_{12} = 1/4$$

Portanto,

$$E[XYZ] = (6 + 2 + 4 + 12)/4 = 6$$

(b) Com $q_j = P\{XY + XZ + YZ = j\}$, temos

$$q_{11} = q_5 = q_8 = q_{16} = 1/4$$

Portanto,

$$E[XY + XZ + YZ] = (11 + 5 + 8 + 16)/4 = 10$$

6.3 Nesta solução, fazemos uso da identidade

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n!$$

que é obtida porque $e^{-x} x^n/n!, x > 0$, é a função densidade de uma variável aleatória gama com parâmetros $n + 1$ e λ , e sua integral é igual a 1.

(a)

$$\begin{aligned} 1 &= C \int_0^{\infty} e^{-y} \int_{-y}^y (y - x) dx dy \\ &= C \int_0^{\infty} e^{-y} 2y^2 dy = 4C \end{aligned}$$

Portanto, $C = 1/4$.

(b) Como a densidade conjunta é diferente de zero somente quando $y > x$ e $y > -x$, temos, para $x > 0$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{4} \int_x^{\infty} (y - x) e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} u e^{-(x+u)} du \\ &= \frac{1}{4} e^{-x} \end{aligned}$$

Para $x < 0$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{4} \int_{-x}^{\infty} (y - x) e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{4} [-ye^{-y} - e^{-y} + xe^{-y}]_{-x}^{\infty} \\ &= (-2xe^x + e^x)/4 \end{aligned}$$

$$(c) f_Y(y) = \frac{1}{4} e^{-y} \int_{-y}^y (y - x) dx = \frac{1}{2} y^2 e^{-y}$$

(d)

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{4} \left[\int_0^{\infty} x e^{-x} dx + \int_{-\infty}^0 (-2x^2 e^x + x e^x) dx \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \int_0^{\infty} (2y^2 e^{-y} + y e^{-y}) dy \right] \\ &= \frac{1}{4} [1 - 4 - 1] = -1 \end{aligned}$$

$$(e) E[Y] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^3 e^{-y} dy = 3$$

- 6.4 As variáveis aleatórias multinomiais $X_i, i = 1, \dots, r$, representam os números de cada um dos tipos de resultados $1, \dots, r$ que ocorrem em n tentativas independentes quando cada tentativa leva a um desses resultados com respectivas probabilidades $p_1, \dots, p_r$. Agora, digamos que uma tentativa leve a um resultado de categoria 1 se ela tiver levado a qualquer um dos resultados tipo $1, \dots, r_1$; digamos que a tentativa leve a um resultado de categoria 2 se ela tiver levado a qualquer um dos resultados tipo $r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2$; e assim por diante. Com essas definições, $Y_1, \dots, Y_k$ representam os números de resultados das categorias $1, 2, \dots, k$ quando n tentativas independentes que resultam cada uma delas em uma das categorias $1, \dots, k$ com respectivas probabilidades $\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i-1} p_j, i = 1, \dots, k$, são realizadas. Mas, por definição, tal vetor tem uma distribuição multinomial.

- 6.5 (a) Fazendo $p_j = P\{XYZ = j\}$, temos

$$p_1 = 1/8, p_2 = 3/8, p_4 = 3/8, p_8 = 1/8$$

- (b) Fazendo $p_j = P\{XY + XZ + YZ = j\}$, temos

$$p_3 = 1/8, p_5 = 3/8, p_8 = 3/8, p_{12} = 1/8$$

- (c) Fazendo $p_j = P\{X^2 + YZ = j\}$, temos

$$p_2 = 1/8, p_3 = 1/4, p_5 = 1/4, p_6 = 1/4, p_8 = 1/8$$

- 6.6 (a)

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \int_1^5 (x/5 + cy) dy dx \\ &= \int_0^1 (4x/5 + 12c) dx \\ &= 12c + 2/5 \end{aligned}$$

Portanto, $c = 1/20$.

- (b) Não, não é possível fatorar a densidade.

(c)

$$\begin{aligned} P\{X + Y > 3\} &= \int_0^1 \int_{3-x}^5 (x/5 + y/20) dy dx \\ &= \int_0^1 [(2+x)x/5 + 25/40 - (3-x)^2/40] dx \\ &= 1/5 + 1/15 + 5/8 - 19/120 = 11/15 \end{aligned}$$

6.7 (a) Sim, é possível fatorar a função densidade conjunta.

$$(b) f_X(x) = x \int_0^2 y dy = 2x, 0 < x < 1$$

$$(c) f_Y(y) = y \int_0^1 x dx = y/2, 0 < y < 2$$

$$(d) P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\}P\{Y < y\} \\ = \min(1, x^2) \min(1, y^2/4), \quad x > 0, y > 0$$

$$(e) E[Y] = \int_0^2 y^2/2 dy = 4/3$$

$$(f) P\{X + Y < 1\} = \int_0^1 x \int_0^{1-x} y dy dx \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = 1/24$$

6.8 Suponha que T_i represente o instante de ocorrência de um choque do tipo i , $i = 1, 2, 3$. Para $s > 0, t > 0$,

$$P\{X_1 > s, X_2 > t\} = P\{T_1 > s, T_2 > t, T_3 > \max(s, t)\} \\ = P\{T_1 > s\}P\{T_2 > t\}P\{T_3 > \max(s, t)\} \\ = \exp\{-\lambda_1 s\} \exp\{-\lambda_2 t\} \exp\{-\lambda_3 \max(s, t)\} \\ = \exp\{-(\lambda_1 s + \lambda_2 t + \lambda_3 \max(s, t))\}$$

6.9 (a) Não, classificados em páginas com muitos classificados têm probabilidade menor de serem escolhidos do que aqueles em páginas com poucos classificados.

$$(b) \frac{1}{m} \frac{n(i)}{n}$$

$$\sum_{i=1}^m n(i) \\ (c) \frac{\sum_{i=1}^m n(i)}{nm} = \bar{n}/n, \text{ onde } \bar{n} = \sum_{i=1}^m n(i)/m$$

$$(d) (1 - \bar{n}/n)^{k-1} \frac{1}{m} \frac{n(i)}{n} \frac{1}{n(i)} = (1 - \bar{n}/n)^{k-1} / (nm)$$

$$(e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{nm} (1 - \bar{n}/n)^{k-1} = \frac{1}{nm}.$$

(f) O número de iterações é uma variável aleatória geométrica com média $n\sqrt{n}$.

6.10 (a) $P\{X = i\} = 1/m, \quad i = 1, \dots, m.$

(b) **Passo 2.** Gere uma variável aleatória U uniforme no intervalo $(0, 1)$. Se $U < n(X)/n$, siga para o passo 3. Caso contrário, volte para o passo 1.

Passo 3. Gere uma variável aleatória uniforme U no intervalo $(0, 1)$ e selecione o elemento na página X na posição $[n(X)U] + 1$.

6.11 Sim, elas são independentes. Isso pode ser visto facilmente se perguntarmos, de forma equivalente, se X_N é independente de N . Mas isso é de fato verdade, já que saber quando ocorre a primeira variável aleatória maior que c não afeta a distribuição de probabilidade de seu valor, que é uniforme em $(c, 1)$.

6.12 Suponha que p_i represente a probabilidade de se obter i pontos em uma única jogada de dardo. Então

$$p_{30} = \pi/36$$

$$p_{20} = 4\pi/36 - p_{30} = \pi/12$$

$$p_{10} = 9\pi/36 - p_{20} - p_{30} = 5\pi/36$$

$$p_0 = 1 - p_{10} - p_{20} - p_{30} = 1 - \pi/4$$

(a) $\pi/12$

(b) $\pi/9$

(c) $1 - \pi/4$

(d) $\pi(30/36 + 20/12 + 50/36) = 35\pi/9$

(e) $(\pi/4)^2$

(f) $2(\pi/36)(1 - \pi/4) + 2(\pi/12)(5\pi/36)$

6.13 Seja Z uma variável aleatória normal padrão.

(a)

$$P\left\{\sum_{i=1}^4 X_i > 0\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^4 X_i - 6}{\sqrt{24}} > \frac{-6}{\sqrt{24}}\right\}$$

$$\approx P\{Z > -1,2247\} \approx 0,8897$$

(b)

$$P\left\{\sum_{i=1}^4 X_i > 0 \mid \sum_{i=1}^2 X_i = -5\right\} = P\{X_3 + X_4 > 5\}$$

$$= P\left\{\frac{X_3 + X_4 - 3}{\sqrt{12}} > 2/\sqrt{12}\right\}$$

$$\approx P\{Z > 0,5774\} \approx 0,2818$$

(c)

$$P\left\{\sum_{i=1}^4 X_i > 0 \mid X_1 = 5\right\} = P\{X_2 + X_3 + X_4 > -5\}$$

$$= P\left\{\frac{X_2 + X_3 + X_4 - 4,5}{\sqrt{18}} > -9,5/\sqrt{18}\right\}$$

$$\approx P\{Z > -2,239\} \approx 0,9874$$

6.14 No desenvolvimento a seguir, C não depende de n .

$$P\{N = n \mid X = x\} = f_{X|N}(x|n)P\{N = n\}/f_X(x)$$

$$= C \frac{1}{(n-1)!} (\lambda x)^{n-1} (1-p)^{n-1}$$

$$= C(\lambda(1-p)x)^{n-1}/(n-1)!$$

o que mostra que, dado que $X = x$, $N - 1$ é uma variável aleatória de Poisson com média $\lambda(1 - p)x$. Isto é,

$$\begin{aligned} P\{N = n | X = x\} &= P\{N - 1 = n - 1 | X = x\} \\ &= e^{-\lambda(1-p)x} (\lambda(1-p)x)^{n-1} / (n-1)!, n \geq 1. \end{aligned}$$

6.15 (a) O Jacobiano da transformação é

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Como as equações $u = x$, $v = x + y$ implicam que $x = u$, $y = v - u$, obtemos

$$f_{U,V}(u, v) - f_{X,Y}(u, v - u) = 1, \quad 0 < u < 1, \quad 0 < v - u < 1$$

ou, equivalentemente,

$$f_{U,V}(u, v) = 1, \quad \max(v - 1, 0) < u < \min(v, 1)$$

(b) Para $0 < v < 1$,

$$f_V(v) = \int_0^v du = v$$

Para $1 \leq v \leq 2$,

$$f_V(v) = \int_{v-1}^1 du = 2 - v$$

6.16 Seja U uma variável aleatória uniforme no intervalo $(7, 11)$. Se o seu lance for x , $7 \leq x \leq 10$, a probabilidade de que ele seja o maior é dada por

$$(P\{U < x\})^3 = \left(P\left\{ \frac{U - 7}{4} < \frac{x - 7}{4} \right\} \right)^3 = \left(\frac{x - 7}{4} \right)^3$$

Portanto, o seu lucro esperado – chame-o de $E[G(x)]$ – se o seu lance é x é dado por

$$E[G(x)] = \frac{1}{4}(x - 7)^3(10 - x)$$

Essa função é maximizada quando $x = 37/4$.

6.17 Seja $i_1, i_2, \dots, i_n$ uma permutação de $1, 2, \dots, n$. Então,

$$\begin{aligned} P\{X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n\} &= P\{X_1 = i_1\}P\{X_2 = i_2\} \cdots P\{X_n = i_n\} \\ &= p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_n} \\ &= p_1p_2 \cdots p_n \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade desejada é $n!p_1p_2 \cdots p_n$, que reduz-se a $\frac{n!}{n^n}$ quando todos os p_i 's são iguais a $1/n$.

6.18 (a) Como $\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i$, obtemos $N = 2M$.

(b) Considere as $n - k$ coordenadas cujos valores Y são iguais a 0, e chame-as de coordenadas vermelhas. Como as k coordenadas cujos valores X são iguais a

1 têm a mesma probabilidade de serem qualquer um dos $\binom{n}{k}$ conjuntos de k

coordenadas, resulta que o número de coordenadas vermelhas entre essas k coordenadas tem a mesma distribuição que o número de bolas vermelhas obtidas quando alguém sorteia k bolas de um conjunto de n bolas das quais $n - k$ são vermelhas. Portanto, M é uma variável aleatória hipergeométrica.

$$(c) E[N] = E[2M] = 2E[M] = \frac{2k(n-k)}{n}$$

(d) Usando a fórmula para a variância de uma variável aleatória hipergeométrica dada no Exemplo 8j do Capítulo 4, obtemos

$$\text{Var}(N) = 4 \text{Var}(M) = 4 \frac{n-k}{n-1} k(1 - k/n)(k/n)$$

6.19 (a) Note primeiro que $S_n - S_k = \sum_{i=k+1}^n Z_i$ é uma variável aleatória normal independente de S_k com média 0 e variância $n - k$. Consequentemente, dado que $S_k = y$, S_n é uma variável aleatória normal com média y e variância $n - k$.

(b) Como a função densidade condicional de S_k dado que $S_n = x$ possui argumento y , tudo o que não depende de y pode ser considerado uma constante (por exemplo, x é considerado uma constante). No desenvolvimento a seguir, as grandezas C_i , $i = 1, 2, 3, 4$ são constantes que não dependem de y :

$$\begin{aligned} f_{S_k|S_n}(y|x) &= \frac{f_{S_k, S_n}(y, x)}{f_{S_n}(x)} \\ &= C_1 f_{S_k|S_n}(x|y) f_{S_k}(y) \quad \left(\text{onde } C_1 = \frac{1}{f_{S_n}(x)} \right) \\ &= C_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n-k}} e^{-(x-y)^2/2(n-k)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{k}} e^{-y^2/2k} \\ &= C_2 \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{2(n-k)} - \frac{y^2}{2k} \right\} \\ &= C_3 \exp \left\{ \frac{2xy}{2(n-k)} - \frac{y^2}{2(n-k)} - \frac{y^2}{2k} \right\} \\ &= C_3 \exp \left\{ -\frac{n}{2k(n-k)} \left(y^2 - 2\frac{k}{n}xy \right) \right\} \\ &= C_3 \exp \left\{ -\frac{n}{2k(n-k)} \left[\left(y - \frac{k}{n}x \right)^2 - \left(\frac{k}{n}x \right)^2 \right] \right\} \\ &= C_4 \exp \left\{ -\frac{n}{2k(n-k)} \left(y - \frac{k}{n}x \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Mas a última expressão é a função densidade de uma variável aleatória normal com média $\frac{k}{n}x$ e variância $\frac{k(n-k)}{n}$.

6.20 (a)

$$\begin{aligned} P\{X_6 > X_1 | X_1 = \max(X_1, \dots, X_5)\} \\ &= \frac{P\{X_6 > X_1, X_1 = \max(X_1, \dots, X_5)\}}{P\{X_1 = \max(X_1, \dots, X_5)\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{P\{X_6 = \max(X_1, \dots, X_6), X_1 = \max(X_1, \dots, X_5)\}}{1/5} \\
 &= 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade de que X_6 seja o maior valor é independente de qual é o maior dentre os outros cinco valores (claramente, isso não seria verdade se os X_i 's tivessem distribuições diferentes).

- (b) Uma maneira de resolver este problema é condicionar em $X_6 > X_1$. Agora

$$P\{X_6 > X_1 | X_1 = \max(X_1, \dots, X_5), X_6 > X_1\} = 1$$

Também, por simetria,

$$P\{X_6 > X_1 | X_1 = \max(X_1, \dots, X_5), X_6 < X_1\} = \frac{1}{2}$$

Da letra (a),

$$P\{X_6 > X_1 | X_1 = \max(X_1, \dots, X_5)\} = \frac{1}{6}$$

Logo, condicionando em $X_6 > X_1$, obtemos

$$P\{X_6 > X_2 | X_1 = \max(X_1, \dots, X_5)\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{7}{12}$$

CAPÍTULO 7

7.1 (a) $d = \sum_{i=1}^m 1/n(i)$

(b) $P\{X = i\} = P\{[mU] = i - 1\} = P\{i - 1 \leq mU < i\} = 1/m, \quad i = 1, \dots, m$

(c) $E\left[\frac{m}{n(X)}\right] = \sum_{i=1}^m \frac{m}{n(i)} P\{X = i\} = \sum_{i=1}^m \frac{m}{n(i)} \frac{1}{m} = d$

- 7.2 Faça $I_j = 1$ se a j -ésima bola retirada for branca e a $(j + 1)$ -ésima for preta, e $I_j = 0$ caso contrário. Se X é o número de vezes nas quais uma bola branca é imediatamente seguida por uma bola preta, então podemos representar X como

$$X = \sum_{j=1}^{n+m-1} I_j$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{j=1}^{n+m-1} E[I_j] \\
 &= \sum_{j=1}^{n+m-1} P\{j\text{-ésima bola retirada é branca, } (j+1)\text{-ésima é preta}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n+m-1} P\{j\text{-ésima bola retirada é branca}\}P\{(j+1)\text{-ésima bola retirada é branca}\} \\
&= \sum_{j=1}^{n+m-1} \frac{n}{n+m} \frac{m}{n+m-1} \\
&= \frac{nm}{n+m}
\end{aligned}$$

O desenvolvimento anterior usou o fato de que cada uma das $n+m$ bolas tem a mesma probabilidade de ser a j -ésima bola retirada e, dado que esta bola seja branca, cada uma das demais $n+m-1$ bolas tem a mesma probabilidade de ser a próxima bola escolhida.

- 7.3** Numere arbitrariamente os casais e então faça $I_j = 1$ se o casal número j , $j = 1, \dots, 10$, se sentar na mesma mesa. Então, se X representa o número de casais sentados na mesma mesa, temos

$$X = \sum_{j=1}^{10} I_j$$

então

$$E[X] = \sum_{j=1}^{10} E[I_j]$$

- (a) Para computar $E[I_j]$ neste caso, considere a esposa número j . Como cada um dos $\binom{19}{3}$ grupos de tamanho 3 que não a incluem tem a mesma probabilidade de completar a sua mesa, concluímos que a probabilidade de que seu marido esteja em sua mesa é

$$\frac{\binom{1}{1} \binom{18}{2}}{\binom{19}{3}} = \frac{3}{19}$$

Portanto, $E[I_j] = 3/19$ e assim

$$E[X] = 30/19$$

- (b) Neste caso, como os 2 homens na mesa da esposa j têm a mesma probabilidade de serem qualquer um dos 10 homens, tem-se que a probabilidade de que um deles seja o seu marido é igual a $2/10$, assim

$$E[I_j] = 2/10 \text{ e } E[X] = 2$$

- 7.4** Do Exemplo 2i, sabemos que o número esperado de vezes que um dado precisa ser rolado até que todas as suas faces apareçam pelo menos uma vez é $6(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6) = 14,7$. Agora, se fizermos com que X represente o número

total de vezes em que a face i aparece, então, como $\sum_{i=1}^6 X_i$ é igual ao número total de jogadas, temos

$$14,7 = E \left[\sum_{i=1}^6 X_i \right] = \sum_{i=1}^6 E[X_i]$$

Mas, por simetria, $E[X_i]$ será o mesmo para todo i , e com isso resulta da expressão anterior que $E[X_i] = 14,7/6 = 2,45$.

- 7.5** Faça $I_j = 1$ se ganharmos 1 quando a j -ésima carta for virada, e $I_j = 0$ caso contrário (por exemplo I_1 será igual a 1 se a primeira carta virada for vermelha). Portanto, se X é o nosso número total de vitórias, então

$$E[X] = E \left[\sum_{j=1}^n I_j \right] = \sum_{j=1}^n E[I_j]$$

Agora, I_j será igual a 1 se j cartas vermelhas aparecerem antes de j cartas pretas. Por simetria, a probabilidade deste evento é igual a $1/2$; portanto, $E[I_j] = 1/2$ e $E[X] = n/2$.

- 7.6** Para ver que $N \leq n - 1 + I$, note que, se todos os eventos ocorrerem, então ambos os lados dessa desigualdade serão iguais a n . Do contrário, se eles não ocorrerem, então a desigualdade reduz-se a $N \leq n - 1$, o que é claramente verdade nesse caso. Calculando as esperanças, obtemos

$$E[N] \leq n - 1 + E[I]$$

Entretanto, se fizermos $I_i = 1$ se A_i ocorrer, e $I_i = 0$ caso contrário, então

$$E[N] = E \left[\sum_{i=1}^n I_i \right] = \sum_{i=1}^n E[I_i] = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Como $E[I] = P(A_1, \dots, A_n)$, o resultado é obtido.

- 7.7** Imagine que os valores $1, 2, \dots, n$ sejam ordenados e que todos os k valores selecionados sejam considerados especiais. Do Exemplo 3e, a posição do primeiro valor especial, que é igual ao menor valor escolhido, tem média $1 + \frac{n-k}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}$.

Para um argumento mais formal, note que $X \geq j$ se nenhum dos $j-1$ menores valores forem escolhidos. Portanto,

$$P\{X \geq j\} = \frac{\binom{n-j+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n-k}{j-1}}{\binom{n}{j-1}}$$

o que mostra que X tem a mesma distribuição que a variável aleatória do Exemplo 3e (com uma mudança de notação na qual o número total de bolas agora é n , e o número de bolas especiais é k).

- 7.8 Seja X o número de famílias que saem depois da família Sanchez. Numere arbitrariamente todas as $N - 1$ famílias que não sejam a família Sanchez e faça $I_r = 1, 1 \leq r \leq N - 1$, se a família r sair depois da família Sanchez. Então,

$$X = \sum_{r=1}^{N-1} I_r$$

Calculando as esperanças, obtemos

$$E[X] = \sum_{r=1}^{N-1} P\{\text{família } r \text{ sai depois da família Sanchez}\}$$

Considere agora qualquer família que não seja a família Sanchez que tenha despachado k malas. Como cada uma das $k + j$ malas despachadas por essa família ou pela família Sanchez tem a mesma probabilidade de ser a última das $k + j$ malas a aparecer, a probabilidade de que essa família saia depois da família Sanchez é dada por $k/(k + j)$. Como o número de famílias (que não são a família Sanchez) que despacham k malas é n_k quando $k \neq j$, ou $n_j - 1$ quando $k = j$, obtemos

$$E[X] = \sum_k \frac{kn_k}{k + j} - \frac{1}{2}$$

- 7.9 Suponha que a vizinhança de qualquer ponto na borda do círculo seja definida pelo arco que começa naquele ponto e se estende por um comprimento 1. Considere um ponto uniformemente distribuído na borda do círculo – isto é, a probabilidade de que este ponto esteja situado em um arco específico de comprimento x é $x/2\pi$ – e suponha que X represente o número de pontos localizados em sua vizinhança. Com $I_j = 1$ se o item número j está na vizinhança do ponto aleatório, e $I_j = 0$ caso contrário, temos

$$X = \sum_{j=1}^{19} I_j$$

Calculando as esperanças, obtemos

$$E[X] = \sum_{j=1}^{19} P\{\text{item } j \text{ está localizado na vizinhança do ponto aleatório}\}$$

Mas como o item j estará localizado em sua vizinhança se o ponto aleatório estiver sobre o arco de comprimento 1 que sai do item j no sentido anti-horário, temos que

$$P\{\text{item } j \text{ está localizado na vizinhança do ponto aleatório}\} = \frac{1}{2\pi}$$

Portanto,

$$E[X] = \frac{19}{2\pi} > 3$$

Como $E[X] > 3$, pelo menos um dos valores possíveis de X deve exceder 3, o que demonstra o resultado.

7.10 Se $g(x) = x^{1/2}$, então

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad g''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

Assim, a expansão em série de Taylor de $\sqrt{x}$ em λ dá

$$\sqrt{X} \approx \sqrt{\lambda} + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}(X - \lambda) - \frac{1}{8}\lambda^{-3/2}(X - \lambda)^2$$

Calculado as esperanças, obtemos

$$\begin{aligned} E[\sqrt{X}] &\approx \sqrt{\lambda} + \frac{1}{2}\lambda^{-1/2}E[X - \lambda] - \frac{1}{8}\lambda^{-3/2}E[(X - \lambda)^2] \\ &= \sqrt{\lambda} - \frac{1}{8}\lambda^{-3/2}\lambda \\ &= \sqrt{\lambda} - \frac{1}{8}\lambda^{-1/2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\sqrt{X}) &= E[X] - (E[\sqrt{X}])^2 \\ &\approx \lambda - \left(\sqrt{\lambda} - \frac{1}{8}\lambda^{-1/2}\right)^2 \\ &= \lambda - \left(\lambda - \frac{1}{4}\lambda\right) \\ &\approx \frac{1}{4}\lambda \end{aligned}$$

7.11 Numere as mesas de forma que as mesas 1, 2 e 3 possuam 4 cadeiras, e as mesas 4, 5, 6 e 7 possuam duas cadeiras. Além disso, numere as mulheres e considere $X_{ij} = 1$ se a mulher i estiver sentada com o seu marido na mesa j . Observe que

$$E[X_{ij}] = \frac{\binom{2}{2}\binom{18}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{3}{95}, \quad j = 1, 2, 3$$

e

$$E[X_{ij}] = \frac{1}{\binom{20}{2}} = \frac{1}{190}, \quad j = 4, 5, 6, 7$$

Agora, X representa o número de casais que estão sentados nas mesmas mesas. Com isso, temos

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^7 X_{ij}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{22} \sum_{j=1}^3 E[X_{ij}] + \sum_{i=1}^{19} \sum_{j=4}^7 E[X_{ij}] \end{aligned}$$

7.12 Faça $X_i = 1$ se o indivíduo i não recrutar ninguém, e $X_i = 0$ caso contrário. Então,

$$\begin{aligned} E[X_i] &= P\{i \text{ não recruta ninguém de } i+1, i+2, \dots, n\} \\ &= \frac{i-1}{i} \frac{i}{i+1} \dots \frac{n-2}{n-1} \\ &= \frac{i-1}{n-1} \end{aligned}$$

Portanto,

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n-1} = \frac{n}{2}$$

Da equação anterior, também obtemos

$$\text{Var}(X_i) = \frac{i-1}{n-1} \left(1 - \frac{i-1}{n-1}\right) = \frac{(i-1)(n-i)}{(n-1)^2}$$

Agora, para $i < j$,

$$\begin{aligned} E[X_i X_j] &= \frac{i-1}{i} \dots \frac{j-2}{j-1} \frac{j-2}{j} \frac{j-1}{j+1} \dots \frac{n-3}{n-1} \\ &= \frac{(i-1)(j-2)}{(n-2)(n-1)} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= \frac{(i-1)(j-2)}{(n-2)(n-1)} - \frac{i-1}{n-1} \frac{j-1}{n-1} \\ &= \frac{(i-1)(j-n)}{(n-2)(n-1)^2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)(n-i)}{(n-1)^2} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{(i-1)(j-n)}{(n-2)(n-1)^2} \\ &= \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^n (i-1)(n-i) \\ &\quad - \frac{1}{(n-2)(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} (i-1)(n-i)(n-i-1) \end{aligned}$$

7.13 Considere $X_i = 1$ se a i -ésima trinca for formada por um de cada tipo de jogadores. Então,

$$E[X_i] = \frac{\binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{2}{7}$$

Portanto, para a letra (a), obtemos

$$E \left[\sum_{i=1}^3 X_i \right] = 6/7$$

Resulta da equação anterior que

$$\text{Var}(X_i) - (2/7)(1 - 2/7) = 10/49$$

Também, para $i \neq j$,

$$\begin{aligned} E[X_i X_j] &= P\{X_i = 1, X_j = 1\} \\ &= P\{X_i = 1\}P\{X_j = 1 | X_i = 1\} \\ &= \frac{\binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{4}{1} \binom{1}{1} \binom{2}{1} \binom{3}{1}}{\binom{9}{3} \binom{6}{3}} \\ &= 6/70 \end{aligned}$$

Portanto, obtemos para a letra (b)

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^3 X_i \right) &= \sum_{i=1}^3 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{j>1} \sum \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= 30/49 + 2 \binom{3}{2} \left(\frac{6}{70} - \frac{4}{49} \right) \\ &= \frac{312}{490} \end{aligned}$$

7.14 Seja X_i , $i = 1, \dots, 13$, igual a 1 se a i -ésima carta for um ás e 0 caso contrário. Considere $Y_j = 1$ se a j -ésima carta, $j = 1, \dots, 13$, for do naipe de espadas, e suponha que i seja 0 caso contrário. Agora,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n Y_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, Y_j) \end{aligned}$$

Entretanto, X_i é claramente independente de Y_j porque saber o naipe de uma determinada carta não fornece informações sobre o seu tipo (se é um ás, um dois, etc.) e portanto não afeta a probabilidade de que uma outra carta específica seja um ás. Mas, formalmente, suponha que A_{is} , A_{ih} , A_{id} e A_{ie} sejam os eventos em que, respectivamente, a i -ésima carta é de espadas, copas, ouros e paus. Então

$$\begin{aligned} P\{Y_j = 1\} &= \frac{1}{4} (P\{Y_j = 1 | A_{is}\} + P\{Y_j = 1 | A_{ih}\} \\ &\quad + P\{Y_j = 1 | A_{id}\} + P\{Y_j = 1 | A_{ie}\}) \end{aligned}$$

Mas, por simetria, temos

$$P\{Y_j = 1 | A_{is}\} = P\{Y_j = 1 | A_{ih}\} = P\{Y_j = 1 | A_{id}\} = P\{Y_j = 1 | A_{ie}\}$$

Portanto,

$$P\{Y_j = 1\} = P\{Y_j = 1|A_{i,s}\}$$

Como a expressão anterior implica que

$$P\{Y_j = 1\} = P\{Y_j = 1|A_{i,s}^c\}$$

vemos que Y_j e X_i são independentes. Portanto, $\text{Cov}(X_i, Y_j) = 0$, e assim $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

As variáveis aleatórias X e Y , embora sejam não correlacionadas, não são independentes. É possível concluir isso, por exemplo, a partir de

$$P\{Y = 13|X = 4\} = 0 \neq P\{Y = 13\}$$

7.15 (a) Seu ganho esperado sem qualquer informação é 0.

(b) Você deveria dar o palpite “cara” se $p > 1/2$, e “coroa” caso contrário.

(c) Condicionando em V , que é o valor da moeda, obtemos

$$\begin{aligned} E[\text{ganho}] &= \int_0^1 E[\text{ganho}|V = p] dp \\ &= \int_0^{1/2} [1(1-p) - 1(p)] dp + \int_{1/2}^1 [1(p) - 1(1-p)] dp \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

7.16 Dado que o nome escolhido aparece em $n(X)$ posições diferentes na lista, e como cada uma dessas posições tem a mesma probabilidade de ser escolhida, obtemos

$$E[I|n(X)] = P\{I = 1|n(X)\} = 1/n(X)$$

Portanto,

$$E[I] = E[1/n(X)]$$

Logo, $E[mI] = E[m/n(X)] = d$.

7.17 Fazendo $X_i = 1$ se uma colisão ocorrer quando o i -ésimo item é guardado, e $X_i = 0$ caso contrário, podemos expressar o número total de colisões X como

$$X = \sum_{i=1}^m X_i$$

Portanto,

$$E[X] = \sum_{i=1}^m E[X_i]$$

Para determinar $E[X_i]$, condicione na prateleira na qual o item é colocado.

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \sum_j E[X_i | \text{colocado na prateleira } j] p_j \\ &= \sum_j P\{i \text{ causa colisão} | \text{colocado na prateleira } j\} p_j \\ &= \sum_j [1 - (1 - p_j)^{i-1}] p_j \\ &= 1 - \sum_j (1 - p_j)^{i-1} p_j \end{aligned}$$

A penúltima igualdade usou o fato de que, tendo como condição a colocação do item i na prateleira j , esse item causará uma colisão se qualquer um dos $i - 1$ itens anteriores tiver sido colocado na prateleira j . Logo,

$$E[X] = m - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (1 - p_j)^{i-1} p_j$$

Trocando a ordem da soma, obtemos

$$E[X] = m - n + \sum_{j=1}^n (1 - p_j)^m$$

Olhando para o resultado, percebemos que poderíamos tê-lo deduzido mais facilmente ao calcular as esperanças de ambos os lados da identidade

$$\text{número de prateleiras não vazias} = m - X$$

O número esperado de prateleiras não vazias é então obtido definindo-se uma variável indicadora para cada prateleira (igual a 1 se a prateleira não estiver vazia e igual a 0 caso contrário) e em seguida calculando-se a esperança da soma dessas variáveis indicadoras.

7.18 Suponha que L represente a extensão da série inicial. Condicionando no primeiro valor, obtemos

$$E[L] = E[L|\text{primeiro valor é 1}] \frac{n}{n+m} + E[L|\text{primeiro valor é 0}] \frac{m}{n+m}$$

Agora, se o primeiro valor é 1, a extensão da série será a posição do primeiro zero quando considerarmos os $n + m - 1$ valores restantes, dos quais $n - 1$ são 1's e m são 0's (por exemplo, se o valor inicial dos $n + m - 1$ valores restantes for igual a 0, então $L = 1$). Como temos um resultado similar se o primeiro valor for um 0, obtemos, da equação anterior e usando o resultado do Exemplo 3e, que

$$\begin{aligned} E[L] &= \frac{n+m}{m+1} \frac{n}{n+m} + \frac{n+m}{n+1} \frac{m}{n+m} \\ &= \frac{n}{m+1} + \frac{m}{n+1} \end{aligned}$$

7.19 Suponha que X seja o número de jogadas necessárias para que ambas as caixas sejam esvaziadas e Y seja o número de caras nas primeiras $n + m$ jogadas. Então,

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^{n+m} E[X|Y=i] P(Y=i) \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} E[X|Y=i] \binom{n+m}{i} p^i (1-p)^{n+m-i} \end{aligned}$$

Agora, se o número de caras nas primeiras $n + m$ jogadas é i , $i \leq n$, o número de jogadas adicionais é igual ao número de jogadas necessárias para que $n - i$ caras adicionais sejam obtidas. Similarmente, se o número de caras nas primeiras $n + m$ jogadas é i , $i > n$, então, como haveria um total de $n + m - i < m$ coroas, o número de jogadas adicionais é igual ao número necessário para que $i - n$ caras adicionais sejam obtidas. Como o número de jogadas necessárias para que se obtenham j resultados de um tipo particular é uma variável alea-

tória binomial negativa cuja média é a divisão de j pela probabilidade daquele resultado, obtemos

$$E[X] = \sum_{i=0}^n \frac{n-i}{p} \binom{n+m}{i} p^i (1-p)^{n+m-i} + \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{i-n}{1-p} \binom{n+m}{i} p^i (1-p)^{n+m-i}$$

7.20 Calculando as esperanças de ambos os lados da identidade fornecida na dica, obtemos

$$\begin{aligned} E[X^n] &= E \left[n \int_0^\infty x^{n-1} I_X(x) dx \right] \\ &= n \int_0^\infty E[x^{n-1} I_X(x)] dx \\ &= n \int_0^\infty x^{n-1} E[I_X(x)] dx \\ &= n \int_0^\infty x^{n-1} \bar{F}(x) dx \end{aligned}$$

O cálculo da esperança no lado de dentro da integral é justificado porque todas as variáveis aleatórias $I_X(x)$, $0 < x < \infty$, são não negativas.

7.21 Considere uma permutação aleatória $I_1, \dots, I_n$ que tem a mesma probabilidade de ser qualquer uma das $n!$ permutações. Então,

$$\begin{aligned} E[a_{I_j} a_{I_{j+1}}] &= \sum_k E[a_{I_j} a_{I_{j+1}} | I_j = k] P(I_j = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_k a_k E[a_{I_{j+1}} | I_j = k] \\ &= \frac{1}{n} \sum_k a_k \sum_i a_i P\{I_{j+1} = i | I_j = k\} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_k a_k \sum_{i \neq k} a_i \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_k a_k (-a_k) \\ &< 0 \end{aligned}$$

onde a igualdade final foi obtida a partir da hipótese de que $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Como a equação anterior mostra que

$$E \left[\sum_{j=1}^n a_{I_j} a_{I_{j+1}} \right] < 0$$

conclui-se que deve haver alguma permutação $i_1, \dots, i_n$ para a qual

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{i_{j+1}} < 0$$

7.22 (a) $E[X] = \lambda_1 + \lambda_2, E[X] = \lambda_2 + \lambda_3$

(b)

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3) \\ &= \text{Cov}(X_1, X_2 + X_3) + \text{Cov}(X_2, X_2 + X_3) \\ &= \text{Cov}(X_2, X_2) \\ &= \text{Var}(X_2) \\ &= \lambda_2\end{aligned}$$

(c) Condicionando em X_2 , obtemos

$$\begin{aligned}P\{X = i, Y = j\} &= \sum_k P\{X = i, Y = j | X_2 = k\} P\{X_2 = k\} \\ &= \sum_k P\{X_1 = i - k, X_3 = j - k | X_2 = k\} e^{-\lambda_2} \lambda_2^k / k! \\ &= \sum_k P\{X_1 = i - k, X_3 = j - k\} e^{-\lambda_2} \lambda_2^k / k! \\ &= \sum_k P\{X_1 = i - k\} P\{X_3 = j - k\} e^{-\lambda_2} \lambda_2^k / k! \\ &= \sum_{k=0}^{\min(i,j)} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{i-k}}{(i-k)!} e^{-\lambda_3} \frac{\lambda_3^{j-k}}{(j-k)!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^k}{k!}\end{aligned}$$

7.23

$$\begin{aligned}\text{Corr}\left(\sum_i X_i, \sum_j Y_j\right) &= \frac{\text{Cov}(\sum_i X_i, \sum_j Y_j)}{\sqrt{\text{Var}(\sum_i X_i) \text{Var}(\sum_j Y_j)}} \\ &= \frac{\sum_i \sum_j \text{Cov}(X_i, Y_j)}{\sqrt{n\sigma_x^2 n\sigma_y^2}} \\ &= \frac{\sum_i \text{Cov}(X_i, Y_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} \text{Cov}(X_i, Y_j)}{n\sigma_x \sigma_y} \\ &= \frac{n\rho\sigma_x \sigma_y}{n\sigma_x \sigma_y} \\ &= \rho\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade usou o fato de que $\text{Cov}(X_i, Y_i) = \rho\sigma_x \sigma_y$.

7.24 Seja $X_i = 1$ se a i -ésima carta escolhida for um ás, e $X_i = 0$ igual a zero caso contrário. Como

$$X = \sum_{i=1}^3 X_i$$

e $E[X_i] = P\{X_i = 1\} = 1/13$, obtemos $E[X] = 3/13$. Mas, com A sendo o evento em que o ás de espadas é escolhido, temos

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X|A]P(A) + E[X|A^c]P(A^c) \\ &= E[X|A]\frac{3}{52} + E[X|A^c]\frac{49}{52} \\ &= E[X|A]\frac{3}{52} + \frac{49}{52}E\left[\sum_{i=1}^3 X_i|A^c\right] \\ &= E[X|A]\frac{3}{52} + \frac{49}{52}\sum_{i=1}^3 E[X_i|A^c] \\ &= E[X|A]\frac{3}{52} + \frac{49}{52} \cdot 3 \cdot \frac{3}{51} \end{aligned}$$

Usando $E[X] = 3/13$, obtemos o resultado

$$E[X|A] = \frac{52}{3} \left(\frac{3}{13} - \frac{49}{52} \cdot 3 \cdot \frac{3}{51} \right) = \frac{19}{17} = 1,1176$$

Similarmente, fazendo L ser o evento em que pelo menos um ás é escolhido, temos

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X|L]P(L) + E[X|L^c]P(L^c) \\ &= E[X|L]P(L) \\ &= E[X|L] \left(1 - \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \cdot \frac{46}{50} \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$E[X|L] = \frac{3/13}{1 - \frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{52 \cdot 51 \cdot 50}} \approx 1,0616$$

Outra maneira de resolver este problema é numerar os quatro ases, com o ás de espadas recebendo o número 1, e então fazer $Y_i = 1$ se o ás número i for escolhido e $Y_i = 0$ caso contrário. Então,

$$\begin{aligned} E[X|A] &= E\left[\sum_{i=1}^4 Y_i | Y_1 = 1\right] \\ &= 1 + \sum_{i=2}^4 E[Y_i | Y_1 = 1] \\ &= 1 + 3 \cdot \frac{2}{51} = 19/17 \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que, dado que o ás de espadas seja escolhido, as outras duas cartas têm a mesma probabilidade de formar qualquer par entre as 51 cartas restantes; então, a probabilidade condicional de que qualquer carta específica (diferente do ás de espadas) seja escolhida é igual a $2/51$. Também,

$$E[X|L] = E\left[\sum_{i=1}^4 Y_i | L\right] = \sum_{i=1}^4 E[Y_i | L] = 4P(Y_1 = 1 | L)$$

Como

$$P\{Y_1 = 1|L\} = P(A|L) = \frac{P(AL)}{P(L)} = \frac{P(A)}{P(L)} = \frac{3/52}{1 - \frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{52 \cdot 51 \cdot 50}}$$

obtemos o mesmo resultado anterior.

7.25 (a) $E[I|X = x] = P\{Z < X|X = x\} = P\{Z < x|X = x\} = P\{Z < x\} = \Phi(x)$

(b) Resulta da letra (a) que $E[I|X] = \Phi(X)$. Portanto,

$$E[I] = E[E[I|X]] = E[\Phi(X)]$$

E o resultado é obtido porque $E[I] = P\{I = 1\} = P\{Z < X\}$.

(c) Como $X - Z$ é normal com média μ e variância 2, temos

$$\begin{aligned} P\{X > Z\} &= P\{X - Z > 0\} \\ &= P\left\{\frac{X - Z - \mu}{2} > \frac{-\mu}{2}\right\} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{-\mu}{2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu}{2}\right) \end{aligned}$$

7.26 Seja N o número de caras nas primeiras $n + m - 1$ jogadas. Suponha que $M = \max(X, Y)$ seja o número de jogadas necessárias para se acumular pelo menos n caras e pelo menos m coroas. Condicionando em N , obtemos

$$\begin{aligned} E[M] &= \sum_i E[M|N = i]P\{N = i\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E[M|N = i]P\{N = i\} + \sum_{i=n}^{n+m-1} E[M|N = i]P\{N = i\} \end{aligned}$$

Agora, suponha que saibamos que há um total de i caras nas primeiras $n + m - 1$ tentativas. Se $i < n$, então já teremos obtido pelo menos m coroas. Com isso, o número de jogadas adicionais necessárias é igual ao número de $n - i$ caras que ainda precisamos obter; similarmente, se $i \geq n$, então já teremos obtido pelo menos n caras. Com isso, o número de jogadas adicionais necessárias é igual ao número de $m - (n + m - 1 - i)$ coroas que ainda precisamos obter. Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} E[M] &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(n + m - 1 + \frac{n - i}{p}\right) P\{N = i\} \\ &\quad + \sum_{i=n}^{n+m-1} \left(n + m - 1 + \frac{i + 1 - n}{1 - p}\right) P\{N = i\} \\ &= n + m - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n - i}{p} \binom{n + m - 1}{i} p^i (1 - p)^{n+m-1-i} \\ &\quad + \sum_{i=n}^{n+m-1} \frac{i + 1 - n}{1 - p} \binom{n + m - 1}{i} p^i (1 - p)^{n+m-1-i} \end{aligned}$$

O número esperado de jogadas necessárias para que obtenhamos n caras ou m coroas, $E[\min(X, Y)]$, é dado agora por

$$E[\min(X, Y)] = E[X + Y - M] = \frac{n}{p} + \frac{m}{1-p} - E[M]$$

7.27 Este é justamente o tempo necessário para que recolhamos $n-1$ dos n tipos de cupons no Exemplo 2i. Pelos resultados daquele exemplo, a solução é

$$1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{2}$$

7.28 Com $q = 1-p$,

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X \geq i\} = \sum_{i=1}^n P\{X \geq i\} = \sum_{i=1}^n q^{i-1} = \frac{1-q^n}{p}$$

7.29

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = P(X=1, Y=1) - P(X=1)P(Y=1)$$

Portanto,

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1)$$

Como

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(1-X, 1-Y) = -\text{Cov}(1-X, Y) = -\text{Cov}(X, 1-Y)$$

o desenvolvimento anterior mostra que todas as igualdades a seguir são equivalentes quando X e Y são Bernoulli:

1. $\text{Cov}(X, Y) = 0$
2. $P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1)$
3. $P(1-X=1, 1-Y=1) = P(1-X=1)P(1-Y=1)$
4. $P(1-X=1, Y=1) = P(1-X=1)P(Y=1)$
5. $P(X=1, 1-Y=1) = P(X=1)P(1-Y=1)$

7.30 Numere os indivíduos e considere $X_{ij} = 1$ se o j -ésimo indivíduo com tamanho de chapéu i escolher um chapéu com o seu tamanho, e $X_{ij} = 0$ caso contrário. Então, o número de indivíduos que escolhem um chapéu de seu tamanho é

$$X = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

Portanto,

$$E[X] = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} E[X_{ij}] = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} \frac{h_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r h_i n_i$$

CAPÍTULO 8

8.1 Suponha que X represente o número de vendas feitas na próxima semana, e observe que X é inteiro. Da desigualdade de Markov, obtemos:

$$(a) P\{X > 18\} = P\{X \geq 19\} \leq \frac{E[X]}{19} = 16/19$$

$$(b) P\{X > 25\} = P\{X \geq 26\} \leq \frac{E[X]}{26} = 16/26$$

8.2 (a)

$$\begin{aligned}
 P(10 \leq X \leq 22) &= P(|X - 16| \leq 6) \\
 &= P(|X - \mu| \leq 6) \\
 &= 1 - P(|X - \mu| > 6) \\
 &\geq 1 - 9/36 = 3/4
 \end{aligned}$$

$$(b) P\{X \geq 19\} = P\{X - 16 \geq 3\} \leq \frac{9}{9 + 9} = 1/2$$

Na letra (a), usamos a desigualdade de Chebyshev; na letra (b), usamos sua versão unilateral (veja a Proposição 5.1).

8.3 Observe primeiro que $E[X - Y]$ e

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) = 28$$

Usando a desigualdade de Chebyshev na letra (b) e sua versão unilateral nas letras (b) e (c), obtemos os seguintes resultados:

$$(a) P\{|X - Y| > 15\} \leq 28/225$$

$$(b) P\{X - Y > 15\} \leq \frac{28}{28 + 225} = 28/253$$

$$(c) P\{Y - X > 15\} \leq \frac{28}{28 + 225} = 28/253$$

8.4 Se X é o número produzido na fábrica A e Y é o número produzido na fábrica B, então

$$E[Y - X] = -2, \quad \text{Var}(Y - X) = 36 + 9 = 45$$

$$P\{Y - X > 0\} = P\{Y - X \geq 1\} = P\{Y - X + 2 \geq 3\} \leq \frac{45}{45 + 9} = 45/54$$

8.5 Note primeiro que

$$E[X_i] = \int_0^1 2x^2 dx = 2/3$$

Use agora a lei forte dos grandes números para obter

$$\begin{aligned}
 r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n/n} \\
 &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/n} \\
 &= 1/(2/3) = 3/2
 \end{aligned}$$

8.6 Como $E[X_i] = 2/3$ e

$$E[X_i^2] = \int_0^1 2x^3 dx = 1/2$$

temos $\text{Var}(X_i) = 1/2 - (2/3)^2 = 1/18$. Assim, se há n componentes disponíveis, então

$$P\{S_n \geq 35\} = P\{S_n \geq 34,5\} \quad (\text{a correção da continuidade})$$

$$\begin{aligned} &= P\left\{ \frac{S_n - 2n/3}{\sqrt{n/18}} \leq \frac{34,5 - 2n/3}{\sqrt{n/18}} \right\} \\ &\approx P\left\{ Z \geq \frac{34,5 - 2n/3}{\sqrt{n/18}} \right\} \end{aligned}$$

onde Z é uma variável aleatória normal padrão. Já que

$$P\{Z > -1,284\} = P\{Z < 1,284\} \approx 0,90$$

vemos que n deve ser escolhido de forma que

$$(34,5 - 2n/3) \approx -1,284\sqrt{n/18}$$

Resolvendo numericamente, obtemos $n = 55$.

8.7 Se X é o tempo necessário para a manutenção de uma máquina, então

$$E[X] = 0,2 + 0,3 = 0,5$$

Também, como a variância de uma variável aleatória exponencial é igual ao quadrado de sua média, temos

$$\text{Var}(X) = (0,2)^2 + (0,3)^2 = 0,13$$

Portanto, com X_i sendo o tempo necessário para realizar um trabalho de manutenção i , $i = 1, \dots, 20$, e Z sendo uma variável aleatória normal padrão, obtemos

$$\begin{aligned} P\{X_1 + \dots + X_{20} < 8\} &= P\left\{ \frac{X_1 + \dots + X_{20} - 10}{\sqrt{2,6}} < \frac{8 - 10}{\sqrt{2,6}} \right\} \\ &\approx P\{Z < -1,24035\} \\ &\approx 0,1074 \end{aligned}$$

8.8 Note primeiro que, se X é o ganho do jogador em uma única aposta, então

$$\begin{aligned} E[X] &= -0,7 - 0,4 + 1 = -0,1, E[X^2] = 0,7 + 0,8 + 10 = 11,5 \\ &\rightarrow \text{Var}(X) = 11,49 \end{aligned}$$

Portanto, com Z possuindo uma distribuição normal padrão,

$$\begin{aligned} P\{X_1 + \dots + X_{100} \leq -0,5\} &= P\left\{ \frac{X_1 + \dots + X_{100} + 10}{\sqrt{1149}} \leq \frac{-0,5 + 10}{\sqrt{1149}} \right\} \\ &\approx P\{Z \leq 0,2803\} \\ &\approx 0,6104 \end{aligned}$$

8.9 Usando a notação do Problema 8.7, temos

$$\begin{aligned} P\{X_1 + \dots + X_{20} < t\} &= P\left\{ \frac{X_1 + \dots + X_{20} - 10}{\sqrt{2,6}} < \frac{t - 10}{\sqrt{2,6}} \right\} \\ &\approx P\left\{ Z < \frac{t - 10}{\sqrt{2,6}} \right\} \end{aligned}$$

Agora, $P\{Z < 1,645\} \approx 0,95$, então t deve ser tal que

$$\frac{t - 10}{\sqrt{2,6}} \approx 1,645$$

o que resulta em $t \approx 12,65$.

- 8.10** Se a alegação fosse verdadeira, então, pelo teorema do limite central, o conteúdo médio de nicotina (chame-o de X) teria aproximadamente uma distribuição normal com média 2,2 e desvio padrão 0,03. Assim, a probabilidade de que ele seja de 3,1 é

$$\begin{aligned} P\{X > 3,1\} &= P\left\{\frac{X - 2,2}{\sqrt{0,03}} > \frac{3,1 - 2,2}{\sqrt{0,03}}\right\} \\ &\approx P\{Z > 5,196\} \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

onde Z é uma variável aleatória normal padrão.

- 8.11** (a) Se numerarmos as pilhas arbitrariamente e fizermos com que X_i represente o tempo de vida da pilha i , $i = 1, \dots, 40$, então os X_i 's são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Para calcular a média e a variância do tempo de vida da pilha 1, condicionamos em seu tipo. Fazendo $I = 1$ se a bateria 1 for do tipo A , e $I = 0$ se ela for do tipo B , temos

$$E[X_1|I = 1] = 50, \quad E[X_1|I = 0] = 30$$

o que resulta em

$$E[X_1] = 50P\{I = 1\} + 30P\{I = 0\} = 50(1/2) + 30(1/2) = 40$$

Além disso, usando o fato de que $E[W^2] = (E[W])^2 + \text{Var}(W)$, temos

$$E[X_1^2|I = 1] = (50)^2 + (15)^2 = 2725, \quad E[X_1^2|I = 0] = (30)^2 + 6^2 = 936$$

o que resulta em

$$E[X_1^2] = (2725)(1/2) + (936)(1/2) = 1830,5$$

Assim, $X_1, \dots, X_{40}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média 40 e variância $1830,5 - 1600 = 230,5$. Portanto, com $S = \sum_{i=1}^{40} X_i$, temos

$$E[S] = 40(40) = 1600, \quad \text{Var}(S) = 40(230,5) = 9220$$

e o teorema do limite central resulta em

$$\begin{aligned} P\{S > 1700\} &= P\left\{\frac{S - 1600}{\sqrt{9220}} > \frac{1700 - 1600}{\sqrt{9220}}\right\} \\ &\approx P\{Z > 1,041\} \\ &= 1 - \Phi(1,041) = 0,149 \end{aligned}$$

- (b) Suponha que S_A seja o tempo de vida total de todas as pilhas do tipo A e que S_B seja o tempo de vida total de todas as pilhas do tipo B . Então, pelo teorema do limite central, S_A tem aproximadamente uma distribuição normal com mé-

dia $20(50) = 1000$ e variância $20(225) = 4500$, e S_B tem aproximadamente uma distribuição normal com média $20(30) = 600$ e variância $20(36) = 720$. Como a soma de variáveis aleatórias normais independentes também é uma variável aleatória normal, vemos que $S_A + S_B$ é aproximadamente normal com média 1600 e variância 5220. Consequentemente, com $S = S_A + S_B$,

$$\begin{aligned} P\{S > 1700\} &= P\left\{\frac{S - 1600}{\sqrt{5220}} > \frac{1700 - 1600}{\sqrt{5220}}\right\} \\ &\approx P\{Z > 1,384\} \\ &= 1 - \Phi(1,384) = 0,084 \end{aligned}$$

- 8.12** Suponha que N represente o número de médicos voluntários. Dado o evento $N = i$, o número de pacientes atendidos tem como distribuição a soma de i variáveis aleatórias de Poisson independentes com média 30 (cada uma delas). Como a soma de variáveis aleatórias de Poisson também é uma variável aleatória de Poisson, resulta que a distribuição condicional de X dado que $N = i$ é uma distribuição de Poisson com média $30i$. Portanto,

$$E[X|N] = 30N \text{ Var}(X|N) = 30N$$

Como resultado,

$$E[X] = E[E[X|N]] = 30E[N] = 90$$

Também, pela fórmula da variância condicional,

$$\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X|N)] + \text{Var}(E[X|N]) = 30E[N] + (30)^2 \text{Var}(N)$$

Como

$$\text{Var}(N) = \frac{1}{3}(2^2 + 3^2 + 4^2) - 9 = 2/3$$

obtemos $\text{Var}(X) = 690$.

Para obtermos uma aproximação para $P\{X > 65\}$, não seria justificável supor que a distribuição de X seja aproximadamente aquela de uma variável aleatória normal com média 90 e variância 690. O que sabemos, no entanto, é que

$$P\{X > 65\} = \sum_{i=2}^4 P\{X > 65|N=i\}P\{N=i\} = \frac{1}{3} \sum_{i=2}^4 \bar{P}_i(65)$$

onde $\bar{P}_i(65)$ é a probabilidade de que uma variável aleatória de Poisson com média $30i$ seja maior que 65. Isto é,

$$\bar{P}_i(65) = 1 - \sum_{j=0}^{65} e^{-30i} (30i)^j / j!$$

Como uma variável aleatória de Poisson tem distribuição idêntica à da soma de $30i$ variáveis aleatórias de Poisson independentes com média 1, resulta do teorema do limite central que sua distribuição é aproximadamente normal com média e variância iguais a $30i$. Consequentemente, com X_i sendo uma variável aleatória de

Poisson com média 30i, e Z sendo uma variável aleatória normal padrão, podemos aproximar $\bar{P}_i(65)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\bar{P}_i(65) &= P\{X > 65\} \\ &= P\{X \geq 65,5\} \\ &= P\left\{\frac{X - 30i}{\sqrt{30i}} \geq \frac{65,5 - 30i}{\sqrt{30i}}\right\} \\ &\approx P\left\{Z \geq \frac{65,5 - 30i}{\sqrt{30i}}\right\}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{P}_2(65) \approx P\{Z \geq 0,7100\} \approx 0,2389$$

$$\bar{P}_3(65) \approx P\{Z \geq -2,583\} \approx 0,9951$$

$$\bar{P}_4(65) \approx P\{Z \geq -4,975\} \approx 1$$

o que leva ao resultado

$$P\{X > 65\} \approx 0,7447$$

Se tivéssemos equivocadamente assumido X como sendo aproximadamente normal, teríamos obtido a resposta aproximada 0,8244 (a probabilidade exata é 0,7440).

8.13 Calcule os logaritmos e então aplique a lei forte dos grandes números para obter

$$\log \left[\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(X_i) \rightarrow E[\log(X_i)]$$

Portanto,

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n} \rightarrow e^{E[\log(X_i)]}$$

CAPÍTULO 9

9.1 Do axioma (iii), resulta que o número de eventos que ocorrem entre os instantes 8 e 10 tem a mesma distribuição que o número de eventos que ocorrem até o instante 2, e portanto é uma variável aleatória de Poisson com média 6. Com isso, obtemos as seguintes soluções para as letras (a) e (b):

(a) $P\{N(10) - N(8) = 0\} = e^{-6}$

(b) $E[N(10) - N(8)] = 6$

(c) Resulta dos axiomas (ii) e (iii) que, a partir de um instante de tempo, a ocorrência dos eventos é uma variável aleatória de Poisson com média λ . Com isso, o instante de ocorrência esperado para o quinto evento após 14:00 é $2 + E[S_5] = 2 + 5/3$. Isto é, o instante de ocorrência esperado é 15:40.

9.2 (a)

$$\begin{aligned}
 P\{N(1/3) = 2 | N(1) = 2\} &= \frac{P\{N(1/3) = 2, N(1) = 2\}}{P\{N(1) = 2\}} \\
 &= \frac{P\{N(1/3) = 2, N(1) - N(1/3) = 0\}}{P\{N(1) = 2\}} \\
 &= \frac{P\{N(1/3) = 2\}P\{N(1) - N(1/3) = 0\}}{P\{N(1) = 2\}} \quad (\text{pelo axioma (ii)}) \\
 &= \frac{P\{N(1/3) = 2\}P\{N(2/3) = 0\}}{P\{N(1) = 2\}} \quad (\text{pelo axioma (iii)}) \\
 &= \frac{e^{-\lambda/3}(\lambda/3)^2/2!e^{-2\lambda/3}}{e^{-\lambda}\lambda^2/2!} \\
 &= 1/9
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 P\{N(1/2) \geq 1 | N(1) = 2\} &= 1 - P\{N(1/2) = 0 | N(1) = 2\} \\
 &= 1 - \frac{P\{N(1/2) = 0, N(1) = 2\}}{P\{N(1) = 2\}} \\
 &= 1 - \frac{P\{N(1/2) = 0, N(1) - N(1/2) = 2\}}{P\{N(1) = 2\}} \\
 &= 1 - \frac{P\{N(1/2) = 0\}P\{N(1) - N(1/2) = 2\}}{P\{N(1) = 2\}} \\
 &= 1 - \frac{P\{N(1/2) = 0\}P\{N(1/2) = 2\}}{P\{N(1) = 2\}} \\
 &= 1 - \frac{e^{-\lambda/2}e^{-\lambda/2}(\lambda/2)^2/2!}{e^{-\lambda}\lambda^2/2!} \\
 &= 1 - 1/4 = 3/4
 \end{aligned}$$

9.3 Fixe um ponto na estrada e suponha $X_n = 0$ se o n -ésimo veículo que passar for um carro e $X_n = 1$ se for um caminhão, $n \geq 1$. Supomos agora que a sequência X_n , $n \geq 1$, é uma cadeia de Markov com probabilidades de transição

$$P_{0,0} = 5/6, P_{0,1} = 1/6, P_{1,0} = 4/5, P_{1,1} = 1/5$$

Então a proporção de tempos a longo prazo é a solução de

$$\pi_0 = \pi_0(5/6) + \pi_1(4/5)$$

$$\pi_1 = \pi_0(1/6) + \pi_1(1/5)$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

Resolvendo esse conjunto de equações, obtemos

$$\pi_0 = 24/29 \quad \pi_1 = 5/29$$

Assim, $2400/29 \approx 83\%$ dos veículos na estrada são carros.

9.4 As sucessivas classificações de tempo constituem uma cadeia de Markov. Se os estados são 0 para chuvoso, 1 para ensolarado e 2 para encoberto, então a matriz de probabilidades de transição é:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1/2 & 1/2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{matrix} \end{matrix}$$

As proporções de longo prazo satisfazem

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_1(1/3) + \pi_2(1/3) \\ \pi_1 &= \pi_0(1/2) + \pi_1(1/3) + \pi_2(1/3) \\ \pi_2 &= \pi_0(1/2) + \pi_1(1/3) + \pi_2(1/3) \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{aligned}$$

A solução desse sistema de equações é

$$\pi_0 = 1/4, \pi_1 = 3/8, \pi_2 = 3/8$$

Portanto, três oitavos dos dias são ensolarados e um quarto é chuvoso.

9.5 (a) Um cálculo direto dá

$$H(X)/H(Y) \approx 1,06$$

(b) Ambas as variáveis aleatórias assumem dois de seus valores com mesmas probabilidades 0,35 e 0,05. A diferença é que, se elas não assumirem nenhum desses valores, então X , mas não Y , tem a mesma probabilidade de assumir qualquer um de seus três valores restantes. Com isso, do Exercício Teórico 9.13, esperaríamos o resultado da letra (a).

CAPÍTULO 10

10.1 (a)

$$1 = C \int_0^1 e^x dx \Rightarrow C = 1/(e - 1)$$

(b)

$$F(x) = C \int_0^x e^y dy = \frac{e^x - 1}{e - 1}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Portanto, se fizermos $X = F^{-1}(U)$, então

$$U = \frac{e^X - 1}{e - 1}$$

ou

$$X = \log(U(e - 1) + 1)$$

Logo, podemos simular a variável aleatória X gerando um número aleatório U e fazendo $X = \log(U(e - 1) + 1)$.

- 10.2** Use o método de aceitação-rejeição com $g(x) = 1, 0 < x < 1$. O emprego da teoria do cálculo mostra que o valor máximo de $f(x)/g(x)$ ocorre em um valor de x , $0 < x < 1$, tal que

$$2x - 6x^2 + 4x^3 = 0$$

ou, equivalentemente, quando

$$4x^2 - 6x + 2 = (4x - 2)(x - 1) = 0$$

O máximo ocorre, portanto, quando $x = 1/2$. Daí resulta que

$$C = \max f(x)/g(x) = 30(1/4 - 2/8 + 1/16) = 15/8$$

Com isso, o algoritmo é o seguinte:

Passo 1. Gere um número aleatório U_1 .

Passo 2. Gere um número aleatório U_2 .

Passo 3. Se $U_2 \leq 16(U_1^2 - 2U_1^3 + U_1^4)$, faça $X = U_1$; do contrário, retorne para o Passo 2.

- 10.3** É mais eficiente verificar primeiro os valores com maiores probabilidades, como no algoritmo a seguir:

Passo 1. Gere um número aleatório U .

Passo 2. Se $U \leq 0,35$, faça $X = 3$ e pare.

Passo 3. Se $U \leq 0,65$, faça $X = 4$ e pare.

Passo 4. Se $U \leq 0,85$, faça $X = 2$ e pare.

Passo 5. $X = 1$.

10.4 $2\mu - X$

- 10.5** (a) Gere $2n$ variáveis aleatórias exponenciais com média 1, $X_i, Y_i, i = 1, \dots, n$, e depois use o estimador $\sum_{i=1}^n e^{X_i Y_i} / n$.

(b) Podemos usar XY como variável de controle para obter um estimador do tipo

$$\sum_{i=1}^n (e^{X_i Y_i} + c X_i Y_i) / n$$

Outra possibilidade seria usar $XY + X^2 Y^2 / 2$ como variável de controle e assim obter um estimador do tipo

$$\sum_{i=1}^n (e^{X_i Y_i} + c[X_i Y_i + X_i^2 Y_i^2 / 2 - 1/2]) / n$$

A motivação para a última fórmula se baseia no fato de que os primeiros três termos da expansão de e^{xy} em uma série de MacLaurin são $1 + xy + (x^2 y^2)/2$.

Índice

A

Algoritmo da ordenação rápida, analisando, 365-368
Algoritmo polar, 533-534
Amostragem por importância, 535
Amostras aleatórias, distribuição do alcance de, 328-330
Análise combinatória, 15-38
 coeficientes multinomiais, 24-28
 combinações, 19-24
 permutações, 17-20
 princípio da contagem, 15-18
 soluções inteiras de equações, número de, 27-31
Arquimedes, 255-256
Ars Conjectandi (A Arte da Conjectura), 179-180, 462-463
Atualização sequencial de informações, 128-131
Atualizando informações sequencialmente, 128-131
Axioma, definido, 44-45
Axiomas da probabilidade, 43-47

B

Bayes, Thomas, 99-100
Bell, E. T., 255-256
Bernoulli, Jacques, 179-181
Bernoulli, James, 170-171, 180-181, 462-463
Bernoulli, Nicholas, 462-463
Bernoulli, tentativas de, 144-145
Bernoulli, variáveis aleatórias de, 170-176, 476-477
Bernstein, polinômios de, 489
Bertrand, Joseph L. F., 243-244
Bertrand, paradoxo de, 243-244

Bits, 503-504
Borel, É., 476-477
Box-Muller, abordagem de, 524-525
Buffon, problema da agulha de, 295-299

C

Cadeia de Markov, 495-501, 512-513
 caminhada aleatória, 498-499
 equações de Chapman-Kolmogorov, 497-499
 ergódica, 499-501
 matriz, 496-497
 probabilidades de transição, 496-497
Caminhada aleatória, 498-499
Caminho Hamiltoniano, definição, 371-372
 máximo número de, em um torneio, 371-373
Canal binário simétrico, 510-511
Cantor, distribuição de, 450-451
Capacidade de canal, 512-514
Cauchy, distribuição de, 265-267
Centro de gravidade, 163
Chances de um evento, 130-131
Chapman-Kolmogorov, equações de, 497-500
Chernoff, limites de, 481-484
Coeficiente de correlação, 384-395
Coeficientes binomiais, 21-22, 30-31
Coeficientes multinomiais, 24-28
 definição, 26-27
Complemento, 41-42, 46-47
Conceito de surpresa, 501-504
Condições,
 calculando condições usando, 396-408
 calculando probabilidades usando, 409-413
 redução de variância usando, 531-533
Conjunta, função distribuição de probabilidade cumulativa, 283-292, 338-342
Conjunto vazio, 69-70

Contagem, princípio básico da, 15-18
 demonstração do, 16-17
 Convolução, 305-306
 Correção de continuidade, 252-253
 Correlação, 439
 Covariância, 384-386, 439
 Cupons únicos no problema do recolhimento de cupons, 383-385
 Curva Gaussiana, 254-255
 Curva normal, 254-255
 Custo de boa vontade, definição, 219-220

D

DeMoivre, Abraham, 244, 254-256, 464-465
 DeMoivre-Laplace, teorema limite de, 251-252
 DeMorgan, leis de, 43-44
 Desigualdade:
 de Boole, 358-360
 de Chebyshev, 459-463
 de Jensen, 484
 de Markov, 459
 Desigualdade de Chebyshev unilateral, 476-481
 Desvio padrão, 489
 Desvio padrão de X , 170-171, 213-214
 Desvios, 386-387
 Diagrama de Venn, 41-43
 Distribuições:
 beta, 267-269
 binomial, aproximação normal para, 251-255
 de Cantor, 450-451
 de Cauchy, 265-267
 de Erlang, 264-265
 gama, 263-265
 Gaussiana, 254-255
 geométrica, 527-529, 404-405
 hipergeométrica negativa, 380-381
 Laplace, 259
 marginal, 284-285
 multinomial, 292
 multivariada, 440
 normal, 422-424
 normal bivariada, 323-325
 normal multivariada, 432-435
 probabilidade contínua, 425
 probabilidade discreta, 424, 426
 qui-quadrado, 264-265, 308-309
 Weibull, 264-266
 zeta (Zipf), 204-205

Distribuições condicionais:
 caso contínuo, 321-330
 distribuição normal bivariada, 323-325
 caso discreto, 317-321
 Distribuições discretas:
 simulação de, 527-530
 distribuição geométrica, 527-529
 variável aleatória binomial, 528-529
 variável aleatória de Poisson, 529-530
 Duração do jogo, problema da, 117-119

E

Edges, 119-120
 Ehrenfest, 503-506, 513
 e teoria da codificação, 506-513
 Equações, número de soluções inteiras de, 27-31
 Ergódica, cadeia de Markov, 499-501
 Espaços amostrais:
 e eventos, 39-44, 69-70
 possuindo resultados igualmente prováveis, 51-64
 Esperança, *veja* Variáveis aleatórias contínuas
 condicional, *veja* Esperança condicional
 correlações, 384-395
 covariância, 384-386
 de somas de variáveis aleatórias, 356-377
 algoritmo de ordenação rápida, analisando, 365-368
 caminhada aleatória em um plano, 364-366
 desigualdade de Boole, 358-360
 esperança de uma variável aleatória binomial, 359-360
 identidade dos máximos e mínimos, 373-376
 média amostral, 358-359
 número esperado de pareamentos, 362-363
 número esperado de séries, 363-365
 probabilidade de uma união de eventos, 368-371
 problemas de recolhimento de cupons, 362-363
 problemas de recolhimento de cupons com probabilidades desiguais, 362-363
 variável aleatória binomial negativa, média de, 359-361
 variável aleatória hipergeométrica, média de, 360-361
 definição geral de, 436-438

- funções geratrizes de momentos, 420-432
 conjuntas, 430-432
 da soma de um número aleatório de
 variáveis aleatórias, 427-430
 determinação da distribuição, 424, 426
 distribuição binomial com parâmetros n e
 p , 421-422
 distribuição de Poisson com média λ , 421-
 423
 distribuição de probabilidade contínua,
 425
 distribuição de probabilidade discreta,
 424, 426
 distribuição exponencial com parâmetro
 λ , 422-423
 distribuição normal, 422-424
 variáveis aleatórias binomiais
 independentes, somas de, 426-427
 variáveis aleatórias de Poisson
 independentes, somas de, 426-427
 variáveis aleatórias normais
 independentes, somas de, 426-427
 método probabilístico, obtendo limites a
 partir de esperanças, 371-373
 momentos do número de eventos ocorridos,
 376-385, 380-381
 momentos no problema do pareamento,
 379-380
 problema do recolhimento de cupons,
 379-381, 383-385
 variáveis aleatórias binomiais, momentos
 de, 377-379
 variáveis aleatórias hipergeométricas,
 momentos de, 378-380
 variáveis aleatórias hipergeométricas
 negativas, 380-384
 propriedades da, 355-458
 variância de somas, 384-395
 Esperança condicional, 394-415, 439
 calculando esperanças usando condições,
 396-408
 calculando probabilidades usando
 condições, 409-413
 definições, 394-397
 e predição, 414-420
 problema do melhor prêmio, 409-412
 variância condicional, 412-415
 Estatísticas de ordem, 325-330, 343
 distribuição do alcance de uma amostra
 aleatória, 328-330
 função densidade conjunta, 325-326
 Estimação por máxima verossimilhança, 200-
 201
 Estratégia Kelley, 447-448
 Evento vazio, 41-42
 Eventos, 40-44
 chance de, 130-131
 independentes, 105-122, 130-131
 independentes por pares, 185-186
 mutuamente exclusivos, 41-42, 69-70
 Eventos mensuráveis, 46-47
 Extensão da mais longa série (exemplo), 186-
 194
- ## F
- Faixa central de uma sequência, 351-352
 Falta de memória, uso do termo, 272-273
 Fermat, identidade combinatória de, 34
 Fermat, Pierre de, 112-113, 117-118
 Fórmula da covariância condicional, 440, 450-
 451
 Fórmula da variância condicional, 440
 Fórmula de Bayes, 89-106, 130-131
 Função de probabilidade, 157-158, 213-214,
 284-285
 Função de probabilidade condicional, 343
 Função de probabilidade conjunta, 284-286
 Função densidade conjunta de ordem
 estatística, 325-326
 Função densidade de probabilidade, 271-272
 definição, 231-232
 Função densidade de probabilidade
 condicional, 343
 Função densidade de probabilidade conjunta,
 286-291, 341-342
 Função densidade de Rayleigh, 279-280
 Função distribuição cumulativa (função
 distribuição), 157-160
 propriedades, 209-212
 Função distribuição de Poisson, calculando a,
 193-195
 Função distribuição de probabilidade (função
 de distribuição), 157-158, 212
 Função gama, 263-273
 Função taxa de falha, 260-261, 272-273
 Funções de probabilidade marginais, 285-286
 Funções distribuição conjuntas, 283-292
 distribuição multinomial, 292
 distribuições marginais, 284-285
 função de probabilidade conjunta, 284-286

- função densidade de probabilidade
cumulativa conjunta, 283-292, 338-342
- Funções geratrizes de momentos, 420-432, 440
conjuntas, 430-432
da soma de um número aleatório de
variáveis aleatórias, 427-430
determinação da distribuição, 424, 426
distribuição binomial com parâmetros n e p ,
421-422
distribuição de Poisson com média λ , 421-423
distribuição de probabilidade contínua, 425
distribuição de probabilidade discreta, 424,
426
distribuição exponencial com parâmetro λ ,
422-423
distribuição normal, 422-424
variáveis aleatórias binomiais
independentes, somas de, 426-427
variáveis aleatórias de Poisson
independentes, somas de, 426-427
variáveis aleatórias normais independentes,
somas de, 426-427
- Funções geratrizes de momentos conjuntas,
430-432
- Funções taxa de risco, 260-263, 272-273
- G**
- Galton, Francis, 471-472
- Gauss, Karl Friedrich, 254-256
- Gerador de números aleatórios, 518-519
semente, 518-519
- H**
- Herança Natural* (Galton), 471-472
- Hipótese de incrementos estacionários, 493-
494
- Hipótese do incremento independente, 493-
494
- Homens da Matemática* (Bell), 255-256
- I**
- Identidade combinatória, 21-22
- Identidade de máximos e mínimos, 373-376
- Incerteza, 503-505
- Independência condicional, 127-128
- Interseção, 40-42, 69-70
- J**
- Jacobiano, determinante do, 336
- Jensen, desigualdade de, 484
- Jogo de roleta (exemplo), 172-173
- K**
- Khinchine, A. Y., 462-463
- Kolmogorov, A. N., 476-477
- L**
- L'Hôpital, regra de, 463-464
- Laplace, distribuição de, 259
- Laplace, Pierre-Simon, 471-472
- Laplace, regra de sucessão de, 127-129
- Legendre, teorema de, 357-358
- Lei da frequência de erros, 471-472
- Lei forte dos grandes números, 472-477, 486-487
- Lei fraca dos grandes números, 459-463
- Leis associativas, 42-43
- Leis comutativas, 42-43
- Leis de grandes números, 459
- Leis distributivas, 42-43
- Liapounoff, A., 464-465
- Log-normal, variável aleatória, 312
- M**
- Matriz, 496-497
- Média, 168, 213-214
- Média amostral, 327-328
- Média amostral, 358-359, 440
distribuição conjunta de, 434-437
distribuição da variância amostral e da, 434-
437
- Método da estimação pela máxima
verossimilhança, 224-225
- Método da rejeição, 521-524, 533-534
simulando uma variável aleatória normal,
522-524
método polar, 524-527
simulando uma variável aleatória qui-
quadrado, 526-528
- Método da transformação inversa, 520-522,
533-534
variável aleatória exponencial, simulando,
520-521
variável aleatória gama, simulando, 520-522

Método polar, 524-527
 Método probabilístico, 121-122
 número máximo de caminhos hamiltonianos
 em um torneio, 371-373
 obtendo limites a partir de esperanças, 371-
 373
 Modelo de urna de Polya, 340-341

N

n -ésimo momento de X , 168
 Newton, Isaac, 255-256
 Notação/terminologia, 20-21, 25
 Número pseudoaleatórios, 518-519
 Números aleatórios, 455-456, 518-519, 533-534

O

O Método Probabilístico,
 (Alon/Spencer/Erdos), 121-122

P

Paradigma de Poisson, 186-187
 Paradoxo de São Petersburgo, 218-219
 Pareamento, problema do (exemplo), 60-62,
 86-87
 Pareto, V., 205
 Pascal, Blaise, 112-114
 Pearson, Karl, 254-256
 Permutação aleatória, geração, 518-520
 Permutações, 17-20
 Pierre-Simon, Marquês de Laplace, 471-472
 Poisson, Siméon Denis, 180-181
 Pontos, problema dos, 113-114
 População finita, amostragem de uma, 389-395
 Primeiro momento de X , 168
 Princípio básico da contagem, 15-18
 demonstração do, 16-17
 Princípio básico da contagem generalizado,
 16-17
 Princípio da contagem, 15-18
 Probabilidade:
 axiomas da, 43-47
 como uma função contínua de um conjunto,
 64-69
 como uma medida de crença, 68-70
 de um evento, 44-45
 definindo, 43-44

 espaço amostral e eventos, 39-44
 geométrica, 243-244
 proposições simples, 46-52
 regra da multiplicação 85-87, 130-131
 visão pessoal da, 68-69
 visão subjetiva da, 68-69
 Probabilidade atualizada, 128-130
 Probabilidade condicional, 81-89
 eventos independentes, 105-122
 fórmula de Bayes, 89-106
 Probabilidade posterior, 128-130
 Probabilidades *a priori*, 128-129
 Probabilidades de negligência, 99-100
 Probabilidades de transição, cadeias de
 Markov, 496-497
 Probabilidades iniciais, 128-129
 Problema da duração do jogo, 117-119
 Problema da ruína do jogador, 114-116
 Problema de pareamento de Banach, 197-200
 Problema do melhor prêmio, 409-412
 Problema do recolhimento de cupons, 379-381
 cupons únicos no, 383-385
 Problemas selecionados, respostas para, 536-537
 Problemas/exercícios de autoteste, 537-598
 Processo de Poisson, 493-496
 definição, 493-494, 512-513
 hipótese do incremento independente, 493-
 494
 hipótese do incremento estacionário, 493-
 494
 sequência de tempos interchegada, 494-495
 tempo de espera, 495-496
 Processo de ramificação, 453-454

R

*Recherches sur la probabilité de jugements
 en matière criminelle et en matière civile*
 (Investigações sobre a probabilidade de
 veredictos em matérias criminais e civis),
 180-181
 Recolhimento de cupons com probabilidades
 desiguais, 375-377
 Redução de variância:
 técnicas, 529-534
 usando condições, 531-533
 variáveis antitéticas, uso de, 530-532
 variáveis de controle, 532-534
 Regra da multiplicação, 85-87, 130-131
 Relação sinal-ruído, 489

Respostas para problemas selecionados, 536-537

Riemann, G. F. B., 205

S

Semente, 518-519

Sequência de tempos interchegada, 494-495

Shannon, Claude, 510-511

Simulação, 517-536

a partir de distribuições discretas, 527-530

de variáveis aleatórias contínuas:

método da rejeição, 521-524, 533-534

método da transformação inversa, 520-

522, 533-534

técnicas gerais para, 519-528

definição, 517-518

números aleatórios, 518-519, 533-534

números pseudoaleatórios, 518-519

permutação aleatória, geração (exemplo), 518-520

raiz, 518-519

técnicas de redução de variância, 529-534

Simulação, definição, 298-299

Sistema funcional, 15-16

Soluções inteiras de equações, número de, 27-31

Somas de variáveis aleatórias

algoritmo de ordenação rápida, analisando, 365-368

caminhada aleatória em um plano, 364-366

esperança de, 356-377

desigualdade de Boole, 358-360

esperança de uma variável aleatória

binomial, 359-360

número esperado de pareamentos, 362-363

problemas de recolhimento de cupons, 362-363

recolhimento de cupons com

probabilidades desiguais, 375-377

variável aleatória binomial, 358-360

identidade de máximos mínimos, 373-376

média amostral, 358-359

número esperado de séries, 363-365

probabilidade de uma união de eventos, 368-371

variáveis aleatórias binomiais negativas, média de, 359-361

variáveis aleatórias hipergeométricas, média de, 360-361

Stieltjes, integrais de, 436-438

Superconjunto, 41-42

T

Tamanho da zeresima geração, 453-454

Taxa de transmissão de informação, 514

Tempo de espera, 495-496

Tempo de meia-vida, interpretação

probabilística do (exemplo), 302-305

Tempos interchegada, sequência de, 494-495

Tentativas, 108-109

Teorema binomial, 21-22

demonstração combinatória do, 22-23

demonstração por indução matemática, 22-23

Teorema da codificação sem ruído, 506-513

Teorema do limite central, 244, 486-487

Teorema minimax, 218-219

Teorema multinomial, 26-27

Teoremas limites, 459-494

desigualdade de Chebyshev, 459-463

lei forte dos grandes números, 472-477, 486-487

lei fraca dos grandes números, 459-463

teorema do limite central, 462-472, 486-487

Teoria Analítica da Probabilidade (Laplace), 471-472

Teoria da codificação:

canal binário simétrico, 510-511

e entropia, 506-513

teorema da codificação sem ruído, 506-513

Teoria dos jogos, 218-219

Teste da soma de posições de Wilcoxon, 444-445

U

União, 40-42, 69-70

Utilidade, 166-167

V

Valor esperado (esperança), 159-163, 213-214

Varáveis aleatórias conjuntamente contínuas, 286-287, 290-291, 341-342

Variância, 213-214

amostra, 386-387, 440

- condicional, 412-415
- covariância, 384-386
- da distribuição geométrica, 404-405
- Variância amostral, 386-387, 440
- distribuição conjunta da média amostral e da, 434-437
- Variância condicional, 412-415
- variância de uma soma de um número aleatório de variáveis, 414-415
- Variáveis, 204-205. *Veja também* variáveis aleatórias
- antitéticas, 530-532
- Variáveis aleatórias, 151-232, 170-176
- Bernoulli, 170-176
- binomiais negativas, 196-201
- binomial, 170-176, 313-315
- conjuntamente contínuas, 290-291
- contínuas, 231-282
- de Poisson, 180-183, 213-214, 313
- definição, 151, 212
- dependentes, 293-294
- discretas, 157-160, 213-214
- distribuição de probabilidade conjunta de, 330-339
- distribuição de uma função de, 268-270
- distribuição zeta (Zipf), 204-205
- esperança de somas de, 356-377
- esperança de uma função de, 163-168
- esperança de uma soma de uma função de, 398-399
- estatísticas de ordem, 325-330, 343
- exponenciais, 255-256
- função distribuição cumulativa, 157-160
- funções geratrizes de momentos, 420-432
- da soma de um número aleatório de, 427-430
- gama, 307-309
- geométricas, 194-197, 314-318
- hipergeométricas, 200-204
- independentes, 292-305
- intercambiáveis, 338-342
- normais, 244-252, 309-313
- propriedades da, 209-212
- somas de, 205-210
- uniformes, 239-244
- uniformes identicamente distribuídas, 305-308
- valor esperado (esperança), 159-163
- variância, 213-214
- variância de uma soma de um número aleatório de, 414-415
- Weibull, 265-266
- Variáveis aleatórias binomiais, 170-176, 313-315
- função distribuição binomial, calculando, 179-181
- momentos de, 377-379
- propriedades de, 175-179
- simulando, 528-529
- variância de, 387-395
- Variáveis aleatórias binomiais independentes, somas de, 314-315, 426-427
- Variáveis aleatórias binomiais negativas, 196-201
- Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas, 283-355
- função densidade de probabilidade conjunta, 286-291, 341-342
- funções densidade de probabilidade marginais, 285-286
- funções distribuição conjuntas, 283-292
- Variáveis aleatórias contínuas, 231-282
- distribuição beta, 267-269
- distribuição de Cauchy, 265-267
- distribuição de Weibull, 264-266
- distribuição gama, 263-265
- esperança de, 235-240
- simulação de:
 - método da rejeição, 521-524, 533-534
 - método da transformação inversa, 520-522, 533-534
 - técnicas gerais para, 519-528
- Variáveis aleatórias de Bernoulli independentes, probabilidade de erro de aproximação, 484-487
- Variáveis aleatórias de Poisson, 180-183, 213-214, 313-315
- simulando, 529-530
- Variáveis aleatórias de Poisson independentes, somas de, 313-315, 426-427
- Variáveis aleatórias de Weibull, 265-266
- Variáveis aleatórias dependentes, 293-294
- Variáveis aleatórias discretas, 157-160, 213-214
- Variáveis aleatórias exponenciais, 255-263, 272-273
- funções taxa de risco, 260-263
- Variáveis aleatórias gama, 307-309
- Variáveis aleatórias geométricas, 194-197, 314-318
- Variáveis aleatórias hipergeométricas, 200-204
- momentos de, 378-380
- Variáveis aleatórias hipergeométricas negativas, 380-384

- Variáveis aleatórias identicamente distribuídas, 305-308
 variáveis aleatórias
- Variáveis aleatórias independentes, 292-305, 343
 distribuições condicionais:
 caso contínuo, 321-330
 caso discreto, 317-321
 problema da agulha de Buffon, 295-299
 somas de, 305-318
 subconjuntos aleatórios, 298-302
 tempo de meia-vida, interpretação probabilística do (exemplo), 302-305
 variáveis aleatórias binomiais, 313-315
 variáveis aleatórias de Poisson, 313-315
 variáveis aleatórias gama, 307-309
 variáveis aleatórias geométricas, 314-318
 variáveis aleatórias normais, 309-313
 variáveis aleatórias uniformes identicamente distribuídas, 305-308
- Variáveis aleatórias intercambiáveis, 338-342
- Variáveis aleatórias normais, 309-313
 distribuição conjunta da média e da variância amostrais, 434-437
 distribuição normal multivariada, 432-435
 método polar, 524-527
 simulando, 522-524
- Variáveis aleatórias normais independentes, somas de, 426-427
- Variáveis aleatórias uniformes, 239-244
- Variáveis aleatórias uniformes independentes, soma de, 305-307
- Variáveis antitéticas, redução de variância, 530-532
- Variáveis de controle, redução da variância, 532-534
- Variável aleatória dupla exponencial, 259
- Variável aleatória geométrica com parâmetro p , 528-529
- Variável aleatória qui-quadrado, simulando, 526-528
- Vértices, 119-120
- Visão pessoal da probabilidade, 68-69
- Visão subjetiva da probabilidade, 68-69
- Z**
- Zerésima geração, tamanho da, 453-454
- Zeta (Zipf) distribuição, 204-205
- Zipf, G. K., 205

PROBABILIDADE

*Um curso moderno
com aplicações*

SHELDON ROSS

Probabilidade: um curso moderno com aplicações, 8.ed., apresenta a teoria da probabilidade com suas diversas aplicações. Conceitos fundamentais, como os princípios da análise combinatória e os axiomas da teoria da probabilidade, são temas abordados desde os primeiros capítulos. Destaque para a inclusão de tópicos como Esperança Matemática, Teoremas Limite, Simulação, Cadeias de Markov e Entropia. O estilo conciso e a refinada organização do texto facilitam o aprendizado. Além disso, o livro apresenta exercícios interessantes e inúmeros exemplos solidamente trabalhados.

Texto ideal para cursos de probabilidade em ciências exatas, sociais e econômicas.



Visite a Área do Professor no site
www.bookman.com.br para acessar
material exclusivo (em inglês) deste livro.

PROBABILIDADE

ISBN 978-85-7780-621-8



9 788577 806218



bookman®
EMPRESA DO GRUPO ARTMED

www.bookman.com.br

COLEÇÃO SCHAUM

AYRES & MENDELSON
Cálculo, 4.ed.

BRONSON & COSTA
Equações Diferenciais, 3.ed.

KAZMIER, L.
Estatística Aplicada à Administração e Economia,
4.ed.

LIPSCHUTZ & LIPSON
Álgebra Linear, 3.ed.

LIPSCHUTZ & LIPSON
Matemática Discreta, 2.ed.

MENDELSON, E.
Introdução ao Cálculo, 2.ed.

MOYEE & AYRES JR.
Trigonometria, 3.ed.

RICH, B.
Geometria, 3.ed.

SAFIER, E.
Pré-cálculo

SCHMIDT & AYRES JR.
Matemática para Ensino Superior, 3.ed.

SPIEGEL & LIU
Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas, 2.ed.

SPIEGEL & MOYER
Álgebra, 2.ed.

SPIEGEL E COLS
Probabilidade e Estatística, 2.ed.

SPIEGEL & STEPHENS
Estatística

WREDE & SPIEGEL
Cálculo Avançado, 2.ed.



bookman®

EMPRESA DO GRUPO ARTMED

www.bookman.com.br